

# Skypod, système automatisé de préparation de commande

## Présentation

Le système Skypod est une solution d'aide à la préparation de commande dans des zones de stockage de grande capacité. Il est conçu en France (région Hauts-de-France) par la société Exotec. Sa flexibilité et son adaptabilité en font un leader de son domaine, ce qui a permis à Exotec de devenir en 2022 la première licorne industrielle française (« start-up » valorisée à plus d'un milliard de dollars US). De grands noms internationaux du commerce en ligne ou physique comptent parmi ses principaux clients.

L'une de ses spécificités est son robot manipulateur de bac qui peut évoluer dans les trois dimensions. Il peut ainsi se déplacer sur le sol pour circuler dans les allées et rejoindre les postes de livraison (**figure 1**). Mais il peut également évoluer verticalement pour atteindre les bacs dans lesquels les produits sont stockés (**figure 2**).



Figure 1 - Robot évoluant horizontalement



Figure 2 - Robot évoluant verticalement

Quatre composants permettent de mettre en œuvre cette solution (**figure 4**) :

- la flotte de robots qui transporte les bacs entre opérateurs et zones de stockage ;
- les racks, permettant de stocker les bacs, et dont le positionnement et la structure permettent les déplacements horizontaux et verticaux des robots ;
- les stations qui permettent aux opérateurs de déposer et récupérer les produits dans les bacs apportés par les robots ;
- le serveur permettant de gérer la flotte de robots en lien avec les consignes données par les stations.

Ce sujet s'intéresse particulièrement aux déplacements du robot. Un extrait du cahier des charges est donné sous forme de diagramme d'exigence par la **figure 25** de l'**annexe 2**.

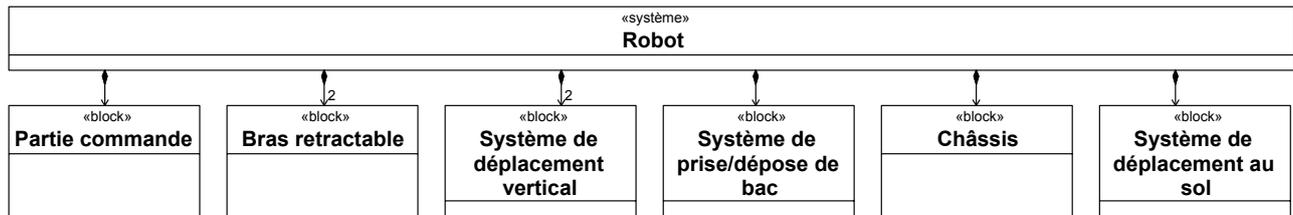
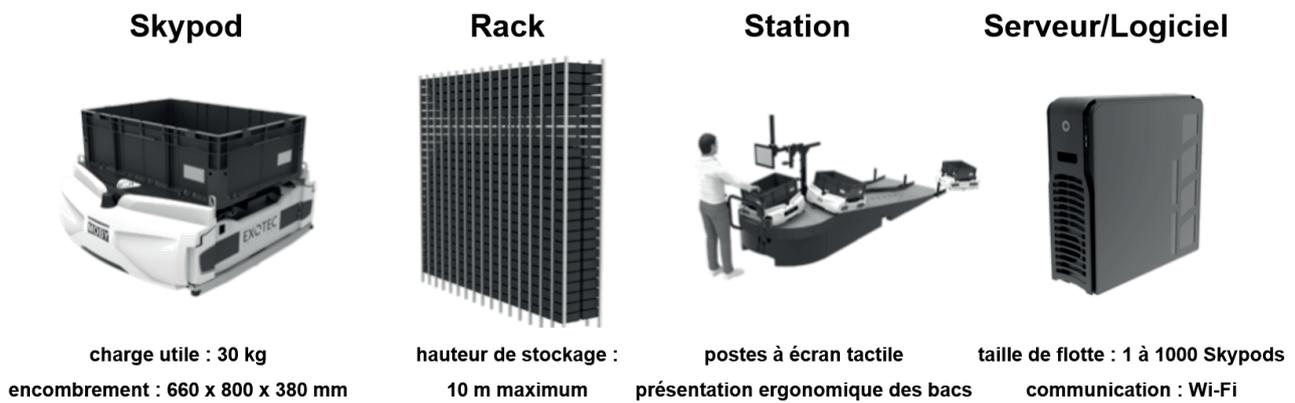


Figure 3 - Diagramme de définition de blocs d'un robot Skypod



**Figure 4 - Principaux composants de la solution Skypod**

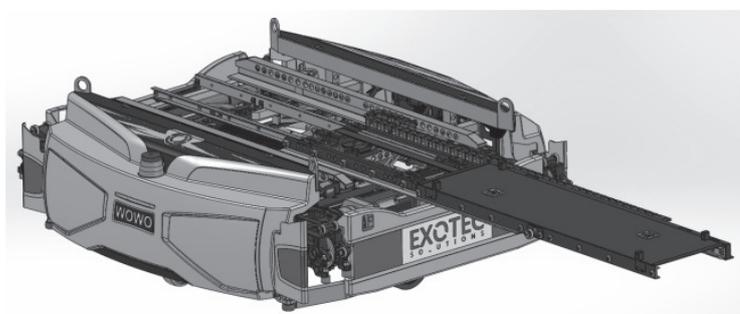
## Analyse structurelle du robot

La structure du robot est présentée **figure 3**. Ce robot est constitué d'un *châssis* et de différents sous-systèmes.

- La *partie commande* contrôle le robot, communique avec le serveur et fournit des consignes aux autres sous-systèmes.
- Le *système de déplacement au sol* permet au robot de se déplacer au sein de l'entrepôt. Il est composé de deux roues motrices (droite et gauche) commandées par deux moteurs et de deux autres roues libres permettant de garantir une bonne stabilité au sol (**figure 1**).
- Deux *systèmes de déplacement vertical* (droit et gauche) permettent au robot de s'élever entre les racks afin d'atteindre une hauteur donnée. Ils entraînent quatre pignons situés dans chaque coin du robot qui eux-même engrènent sur des chaînes tendues verticalement le long des racks (**figure 2** et **figure 13**). La liaison pignon/chaîne se comporte comme une liaison pignon/crémaillère.
- Deux *systèmes de bras rétractables* facilitent le déplacement au sol, chaque système de déplacement vertical est positionné sur un bras rétractable. Ils sont rentrés au sein du châssis lors des déplacements au sol, puis sortis lors des déplacements verticaux afin que les pignons entrent en contact avec les chaînes tendues. Un robot ne peut donc évoluer horizontalement qu'au sol.
- Un *système de prise et dépose de bac* translate le bac de sa position de stockage dans le rack à sa position de transport sur le robot (ou inversement). Il est constitué d'une fourche télescopique qui se déploie (**figure 5** et **figure 6**) afin de se positionner sous le bac, puis rentre en déplaçant le bac avec elle.



**Figure 5 -** Prise d'un bac (fourche sous le bac dans un rack)



**Figure 6 -** Fourche déployée

## Partie I - Déroulement d'une préparation de commande

**Objectif** : étudier le comportement séquentiel du robot lors d'une préparation de commande.

Une préparation de commande se déroule en plusieurs étapes. Après réception de la demande, un traitement est effectué afin d'affecter les tâches à réaliser à un ou plusieurs robots (en fonction du nombre de produits demandés) et à un opérateur situé sur une station. Le ou les robots vont ensuite chercher les bacs contenant les produits nécessaires à la commande et les rapportent à la station. Enfin, l'opérateur effectue la mise en carton et expédie la commande.

Le déplacement d'un robot lui permettant d'aller prendre un bac s'effectue en plusieurs phases. Le robot se déplace d'abord au sol de sa position de départ jusqu'au pied de la rangée verticale du rack qui contient le bac à prendre. Une fois en position, ses bras rétractables sortent, ce qui permet aux pignons motorisés d'engrener sur les chaînes tendues verticalement, générant ainsi l'ascension du robot. Pour prendre un bac, le robot s'immobilise de façon à ce que la surface de la fourche soit située 5 cm en-dessous du fond du bac. La fourche télescopique est alors sortie. Puis le robot monte de 10 cm, la fourche est ensuite rentrée afin de translater le bac sur le robot. Le robot peut désormais descendre jusqu'au sol, puis rentrer ses bras rétractables et se déplacer de nouveau au sol jusqu'à la station.

Le comportement séquentiel du robot est décrit par le diagramme d'état donné par la **figure 1** du **document réponse (DR)**. Le **tableau 1** fournit la description des ordres des moteurs et le **tableau 2** les informations reçues par la partie commande. Dans cette partie, les durées des phases d'accélération et de décélération sont négligées pour tous les mouvements.

Ordres moteurs	Rôle	Valeurs
<b>Système de déplacement au sol :</b> M_RoueG M_RoueD	Consigne de vitesse de la roue gauche Consigne de vitesse de la roue droite	Valeurs continues entre $-V_{max}$ et $V_{max}$
<b>Bras rétractables :</b> M_BrasG M_BrasD	Déplacement du bras gauche Déplacement du bras droit	0 pas de déplacement +1 sortie des bras -1 rentrée des bras
<b>Système de déplacement vertical :</b> M_PignonG M_PignonD	Consignes de vitesse des pignons gauches Consignes de vitesse des pignons droits	GV : grande vitesse PV : petite vitesse - GV / - PV : descente + GV / + PV : montée
<b>Fourche télescopique :</b> M_Fourche	Déplacement de la fourche	0 pas de déplacement +1 sortie de la fourche -1 rentrée de la fourche

**Tableau 1** - Variables de sortie de la partie commande

Informations	Rôle
<b>Capteurs fin de course (détecteur) :</b> BrasG_sorti et BrasG_rentré BrasD_sorti et BrasD_rentré Fourche_sortie et Fourche_rentrée	<b>Leur sortie vaut 1 si la position détectée est atteinte, 0 sinon</b> Capteurs du bras rétractable gauche Capteurs du bras rétractable droit Capteurs de la fourche
<b>Position courante du robot :</b> alt_courante pos_courante	position verticale du robot position au sol du robot
<b>Position à atteindre :</b> bac (bac = 0 → prise de bac)  pos_finale etage	présence de bac sur le robot (mission de prise ou de dépose de bac) position au sol d'arrivée numéro d'étagère (0 = étagère du bas) où se situe le bac à prendre

**Tableau 2** - Variables d'entrée de la partie commande

On s'intéresse au scénario d'un robot allant chercher un bac sur l'étagère 1 (etage = 1). On notera que la distance verticale entre deux étagères est de 40 cm. Pour ce scénario, le temps est discrétisé  $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots$  pour  $k \in \mathbb{N}$  avec un pas de temps  $t_{k+1} - t_k = \Delta t$  constant. On notera les constantes suivantes :

Temps de rentrée/sortie de la fourche	$2 \cdot \Delta t$
Temps de rentrée/sortie des bras rétractables	$2 \cdot \Delta t$
Valeurs de consigne pour le déplacement vertical	$GV = 5/\Delta t \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et $PV = \frac{1}{2}GV$

**Q1.** Compléter le chronogramme sur le **DR1** en suivant le scénario suivant :

- à  $t_0$ , le robot reçoit une nouvelle destination (pos\_finale et etage sont connus);
- à  $t_1$ , le calcul de l'itinéraire est fini et le robot commence à se déplacer vers sa destination *pos\_finale*, sa trajectoire est en ligne droite ( $M_{RoueG} = M_{RoueD}$ ) et la consigne est de  $V_{max}$  ;
- à  $t_3$  le robot arrive à *pos\_finale* et commence à sortir les bras ;
- le robot monte et récupère le bac, puis redescend au sol ;
- une fois au sol, le robot retourne à sa position de départ (consigne de  $-V_{max}$ ).

## Partie II - Trajectoire du robot en phase de déplacement au sol

**Objectif :** étudier le comportement cinématique du robot en phase de déplacement au sol.

Pour ses déplacements au sol, le robot possède deux roues motrices **2** et **3** insérées dans deux chaînes de puissance différentes (et donc entraînées par deux moteurs différents). Pour assurer la stabilité au sol, deux autres roues laissées libres de leurs mouvements (dites « folles ») sont associées à un mécanisme permettant aux quatre roues d'être en contact avec le sol en permanence.

On s'intéresse à une trajectoire composée d'un segment droit, d'une courbe permettant au robot de tourner d'un quart de tour vers la gauche, puis d'un dernier segment droit (**figure 7**).

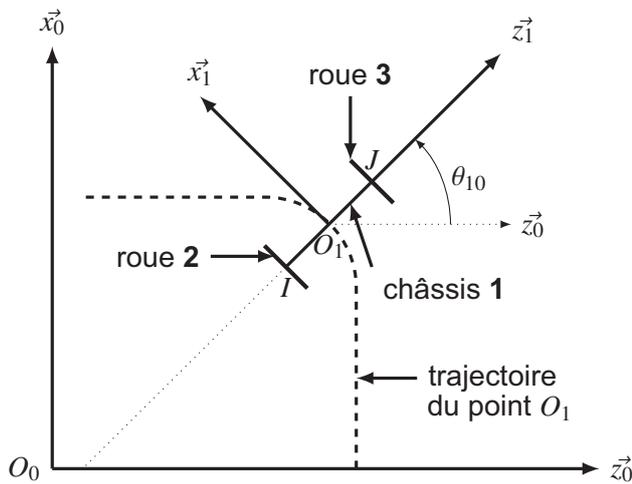


Figure 7 - Paramétrage du robot au sol

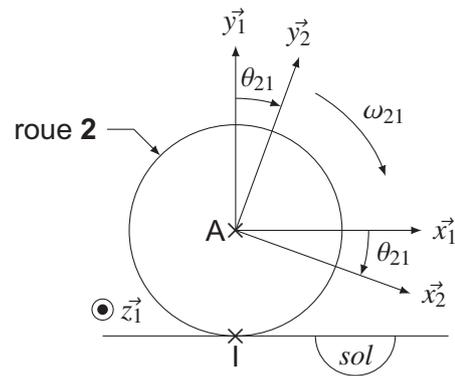


Figure 8 - Paramétrage de la roue 2 en contact avec le sol en I

Le robot est vu comme un ensemble de trois solides : le châssis 1, la roue gauche 2 en contact avec le sol 0 au point I et la roue droite 3 en contact avec le sol 0 au point J.

Les roues 2 et 3 sont en liaison pivot d'axe respectivement  $(A, \vec{z}_1)$  et  $(B, \vec{z}_1)$  avec le châssis 1 et on considérera qu'il y a roulement sans glissement de la roue 2 (respectivement roue 3) par rapport au sol 0 en I (respectivement en J). Pour des raisons de simplification, les roues « folles » ne sont pas étudiées ou représentées mais imposent que le châssis 1 ne peut être en rotation que selon  $\vec{y}_1$ .

On définit :

- $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le référentiel supposé galiléen lié au sol 0. On notera que  $\vec{y}_0$  est donc la verticale ascendante ;
- $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le référentiel lié au châssis 1, avec  $\theta_{10} = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ,  $\omega_{10}(t) = \frac{d\theta_{10}(t)}{dt}$  et la vitesse du robot  $\vec{V}(O_1 \in 1/0) = V(t)\vec{x}_1$  ;
- $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  le référentiel lié à la roue gauche 2, avec A le centre de la roue,  $R = 20$  mm son rayon,  $\theta_{21}(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$  et  $\omega_{21}(t) = \frac{d\theta_{21}(t)}{dt}$  (figure 8) ;
- $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  le référentiel lié à la roue droite 3, avec B le centre de la roue,  $R = 20$  mm son rayon,  $\theta_{31}(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$  et  $\omega_{31}(t) = \frac{d\theta_{31}(t)}{dt}$  (paramétrage analogue à la roue 2) ;
- $L$  la largeur du robot :  $\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{O_1B} = \frac{L}{2}\vec{z}_1$ .

Q2. À l'aide de la condition de roulement sans glissement en I, donner la relation entre  $V(t)$ ,  $\omega_{21}(t)$  et  $\omega_{10}(t)$ .

Q3. Par un raisonnement analogue, donner directement la relation entre  $V(t)$ ,  $\omega_{31}(t)$  et  $\omega_{10}(t)$ .

Q4. En déduire  $\omega_{10}(t)$  en fonction de  $\omega_{21}(t)$  et de  $\omega_{31}(t)$ .

On s'intéresse dans un premier temps à une trajectoire rectiligne. On note  $\omega_{moy}(t)$  la vitesse de rotation des roues pour cette trajectoire pour une vitesse  $V(t) = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

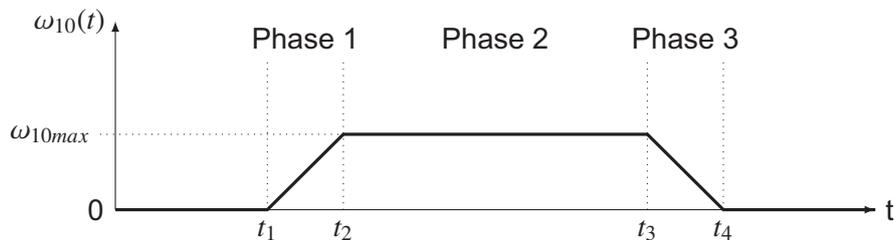
Q5. Démontrer que pour une trajectoire rectiligne,  $\omega_{21}(t) = \omega_{31}(t)$ . En déduire  $\omega_{moy}(t)$  et donner sa valeur.

On s'intéresse dans un deuxième temps à la réalisation du virage de  $90^\circ$  vers la gauche (figure 7). Pour cela, on fait varier la vitesse  $\omega_{21}$  par une loi en trapèze et la vitesse  $\omega_{31}$  par une seconde loi en

trapèze telle que  $\dot{\omega}_{21}(t) = -\dot{\omega}_{31}(t)$ , avec  $\dot{\omega}_{21}$  et  $\dot{\omega}_{31}$  les accélérations angulaires des roues 2 et 3 par rapport au châssis 1.

**Q6.** Donner dans ces conditions la valeur de l'accélération angulaire  $\dot{\omega}_{10}(t)$  en fonction de  $\dot{\omega}_{21}(t)$ .

Ces lois de commande de vitesse des roues aboutissent à l'évolution de  $\omega_{10}(t)$  au cours d'un virage de  $90^\circ$  donnée **figure 9**. La norme de l'accélération angulaire pendant les phases 1 et 3 est constante et notée  $\gamma_{10}$ .

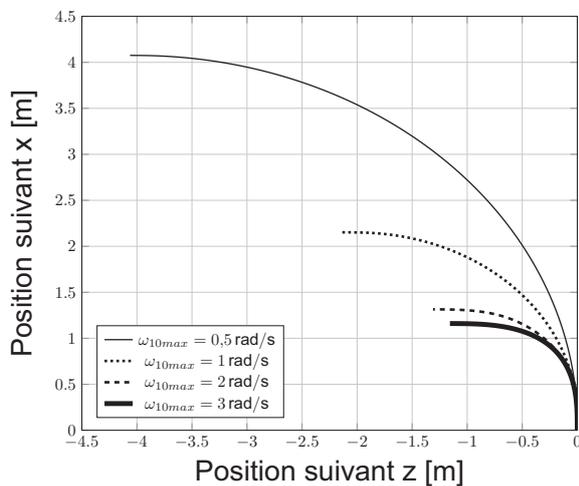


**Figure 9** - Évolution de  $\omega_{10}$  lors d'un virage de  $90^\circ$

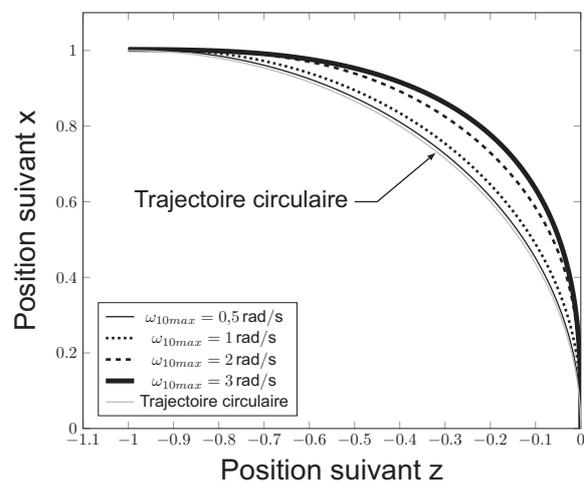
**Q7.** En faisant l'hypothèse que  $t_1 = 0$ , donner les expressions littérales de  $t_2$ , de  $t_3$  et de  $t_4$  en fonction de  $\omega_{10max}$  et de  $\gamma_{10}$ .

On propose plusieurs simulations de trajectoire pour différentes valeurs de  $\omega_{10max}$  dont le point de départ est de coordonnées (0,0) (**figure 10**). À des fins de comparaison, la **figure 11** présente ces trajectoires en version normalisée (point de départ et d'arrivée de coordonnées (0,0) et (-1,1)).

**Q8.** À l'aide des **figure 10** et **figure 11**, commenter l'influence de  $\omega_{10max}$  sur la trajectoire du robot lors d'un virage.



**Figure 10** - Trajectoires selon plusieurs valeurs de  $\omega_{10max}$

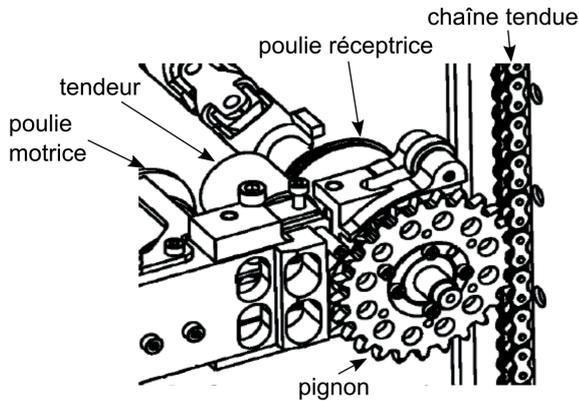


**Figure 11** - Trajectoires normalisées selon plusieurs valeurs de  $\omega_{10max}$

## Partie III - Sollicitation du robot en mouvement vertical

**Objectif** : déterminer la puissance des moteurs nécessaire pour assurer le mouvement vertical du robot.

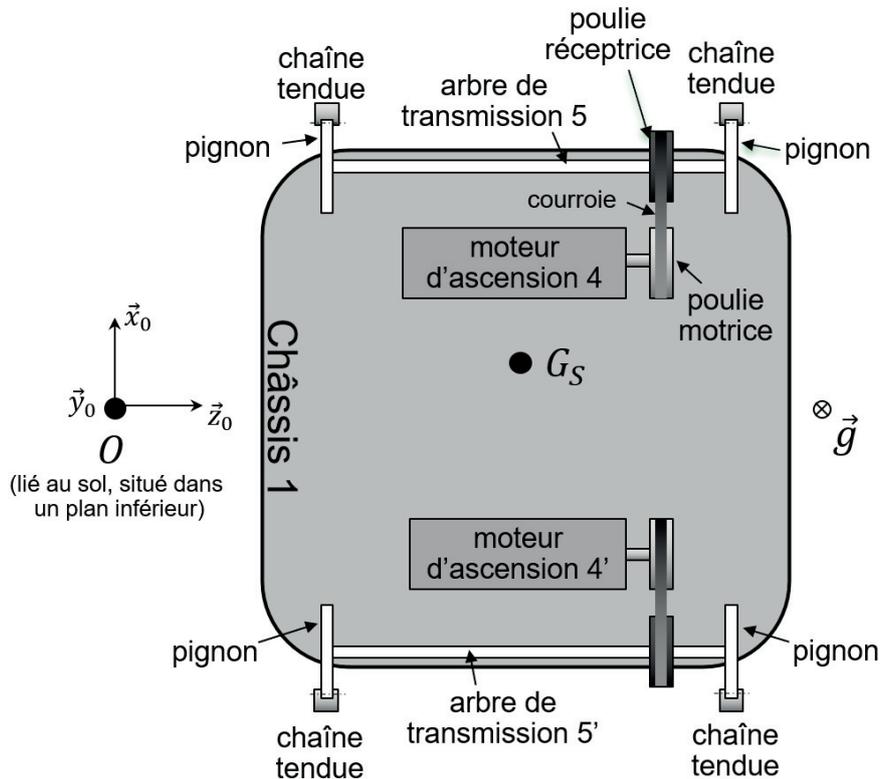
Une fois le robot positionné aux pieds des racks, les bras rétractables sont déployés afin de mettre en contact les pignons sur les chaînes tendues le long des poteaux constituant les racks. La rotation des pignons entraînera alors l'ascension du robot, **figure 12** et **figure 13**.



**Figure 12** - Détail de l'engrènement d'un pignon sur la chaîne



**Figure 13** - Vue du robot en montée (sans charge ni bac), avec pignons et chaînes redessinés



**Figure 14** - Schématisation de la chaîne de puissance associée à l'ascension du robot. Vue de dessus du robot, pesanteur selon  $-\vec{y}_0$ .

La structure de la chaîne de puissance permettant l'ascension du robot est schématisée **figure 14**. Elle est composée de deux ensembles similaires, chacun étant constitué d'un moteur d'ascension et

d'un système poulie/courroie dont la poulie motrice est liée à l'arbre de sortie du moteur et la poulie réceptrice à un arbre de transmission. Ce dernier supporte également les deux pignons qui engrènent sur les chaînes tendues. La rotation des pignons va donc permettre de générer le mouvement vertical du robot. Un système annexe, non étudié ni représenté ici, permet de s'assurer que les pignons soient toujours en prise dans les chaînes.

## Hypothèses et paramétrage

- On note  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le référentiel supposé galiléen lié au sol **0**.
- On note  $S$  l'ensemble des pièces en mouvement :

$S = \{\text{Châssis } \mathbf{1} + \text{Moteurs} + \text{Systèmes Poulie/Courroie} + \text{Arbres transmission} + \text{Pignons} + \text{Bac rempli}\}$ , de masse  $m_S$  et de centre d'inertie  $G_S$ , tel que :

$$\vec{OG}_S = x_{G_S} \vec{x}_0 + y_{G_S}(t) \vec{y}_0 + z_{G_S} \vec{z}_0 .$$

La position du centre de gravité n'est pas le centre géométrique du robot car la masse transportée est potentiellement excentrée.

- Le mouvement du châssis **1** par rapport au sol **0** est une translation de vitesse  $v_a(t) \vec{y}_0 = \dot{y}_{G_S}(t) \vec{y}_0$ . Ainsi  $v_a(t)$  est la vitesse d'ascension du robot.
- On définit les vitesses de rotation du moteur **4** et de l'arbre de transmission **5** par rapport au châssis **1** par respectivement  $\vec{\Omega}_{m/1} = \omega_{m1}(t) \vec{z}_0$  et  $\vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{51}(t) \vec{z}_0$ . Les vitesses de rotation du moteur **4'** ( $\vec{\Omega}_{m'/1} = \omega_{m'1}(t) \vec{z}_0$ ) et de l'arbre de transmission **5'** ( $\vec{\Omega}_{5'/1} = \omega_{5'1}(t) \vec{z}_0$ ) sont opposées respectivement à celles de **4** et de **5**.
- L'action mécanique du moteur **4** est modélisée par un torseur couple dont le moment sur son axe de rotation vaut  $C_m(t)$ . On suppose ici que les deux moteurs délivrent le même couple, mais en sens opposés.
- Les différents frottements (internes et externes) sont ramenés sur l'axe de rotation de chaque arbre de transmission et sont modélisés par un moment constant  $C_f \vec{z}_0$  sur l'arbre **5**,  $C'_f \vec{z}_0$  sur l'arbre **5'**. Ces deux couples sont opposés aux vitesses de rotation des arbres **5** et **5'**, de sorte que la valeur numérique de  $C_f$  est de signe opposé à celui de  $\omega_{51}(t)$  et que la valeur numérique de  $C'_f$  est de signe opposé à celui de  $\omega_{5'1}(t)$ .
- On note respectivement  $R_m$ ,  $R_r$  et  $R_p$  les rayons d'enroulement des poulies motrices et réceptrices et le rayon primitif des pignons.
- On note respectivement  $J_m$  et  $J_5$  les moments d'inertie selon leurs axes de rotation d'un arbre moteur (poulie comprise) et d'un arbre de transmission (poulie et roues dentées comprises).
- L'attraction de pesanteur est portée par  $-\vec{y}_0$  de sorte que  $\vec{g} = -g \vec{y}_0$ .
- L'inertie de la courroie est négligée.
- Le châssis inclut la batterie, les cartes électroniques et la connectique.

**Q9.** Déterminer l'expression de l'énergie cinétique  $E_c(S/\mathcal{R}_0)$  de l'ensemble  $S$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ .

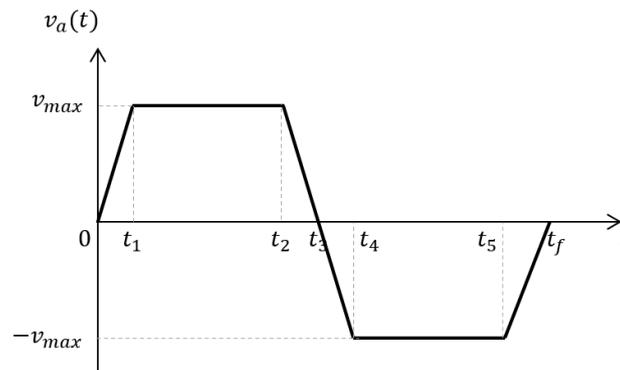
La liaison entre un pignon et une chaîne correspond à un roulement sans glissement sur le rayon primitif  $R_p$  du pignon.

**Q10.** Exprimer le vecteur de la vitesse d'ascension du robot  $v_a(t) \vec{y}_0$  en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre moteur  $\omega_{m1}(t)$ .

**Q11.** En déduire l'expression de l'inertie équivalente notée  $J_{eq}$  de l'ensemble  $S$  rapportée à l'arbre moteur, en fonction de  $m_S$ ,  $J_m$ ,  $J_5$  et des grandeurs géométriques.

- Q12.** Déterminer l'expression de la somme des puissances extérieures (galiléennes) et intérieures à l'ensemble  $S$ . On ne fera apparaître que  $\omega_{m1}(t)$  comme variable cinématique.
- Q13.** Dédire des questions précédentes, en justifiant rigoureusement, l'expression du couple moteur  $C_m(t)$  en fonction de  $\dot{\omega}_{m1}(t)$  et des grandeurs caractéristiques constantes du système.

On donne **figure 15** le profil de vitesse choisi pour l'évolution de la vitesse verticale du robot pour un cycle de montée/descente et dans le **tableau 3** les valeurs numériques associées. On souhaite déterminer l'évolution correspondante du couple moteur.



**Figure 15** - Pilotage adopté pour la vitesse d'ascension pour un cycle de montée/descente

Données	
$R_m = R_r = 30 \text{ mm}$	$t_1 = 2 \text{ s}$
$ C_f  =  C'_f  = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$	$t_2 = 8 \text{ s}$
$J_{eq} = 1,14 \cdot 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$t_3 = 10 \text{ s}$
$R_p = 38 \text{ mm}$	$t_4 = 12 \text{ s}$
$v_{max} = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	$t_5 = 18 \text{ s}$
$m_s = 78 \text{ kg}$	$t_f = 20 \text{ s}$

**Tableau 3** - Valeurs numériques utiles

- Q14.** Compléter le **DR2** en traçant l'évolution de l'accélération angulaire  $\dot{\omega}_{m1}(t)$  au cours du temps.
- Q15.** Tracer sur le **DR3** l'évolution de  $C_f$  au cours du temps.

Il est alors possible, grâce aux travaux précédents, de calculer l'évolution du couple moteur  $C_m(t)$  pour les différentes phases (**tableau 4**).

intervalle	de 0 à $t_1$	de $t_1$ à $t_2$	de $t_2$ à $t_3$	de $t_3$ à $t_4$	de $t_4$ à $t_5$	de $t_5$ à $t_f$
$C_m(t)$	-17 N·m	-15,5 N·m	-14 N·m	-12 N·m	-13,5 N·m	-15 N·m

**Tableau 4** - Évolution de  $C_m(t)$  au cours du temps.

D'après les exigences, le moteur envisagé pour la motorisation est capable de fournir une puissance mécanique de 1 000 W.

- Q16.** Après avoir précisé l'instant correspondant, déterminer la valeur numérique de la puissance maximale que le moteur devra développer pour assurer le mouvement étudié. Conclure quant au choix du moteur envisagé.

## ANNEXE 2

### Extrait du cahier des charges du robot

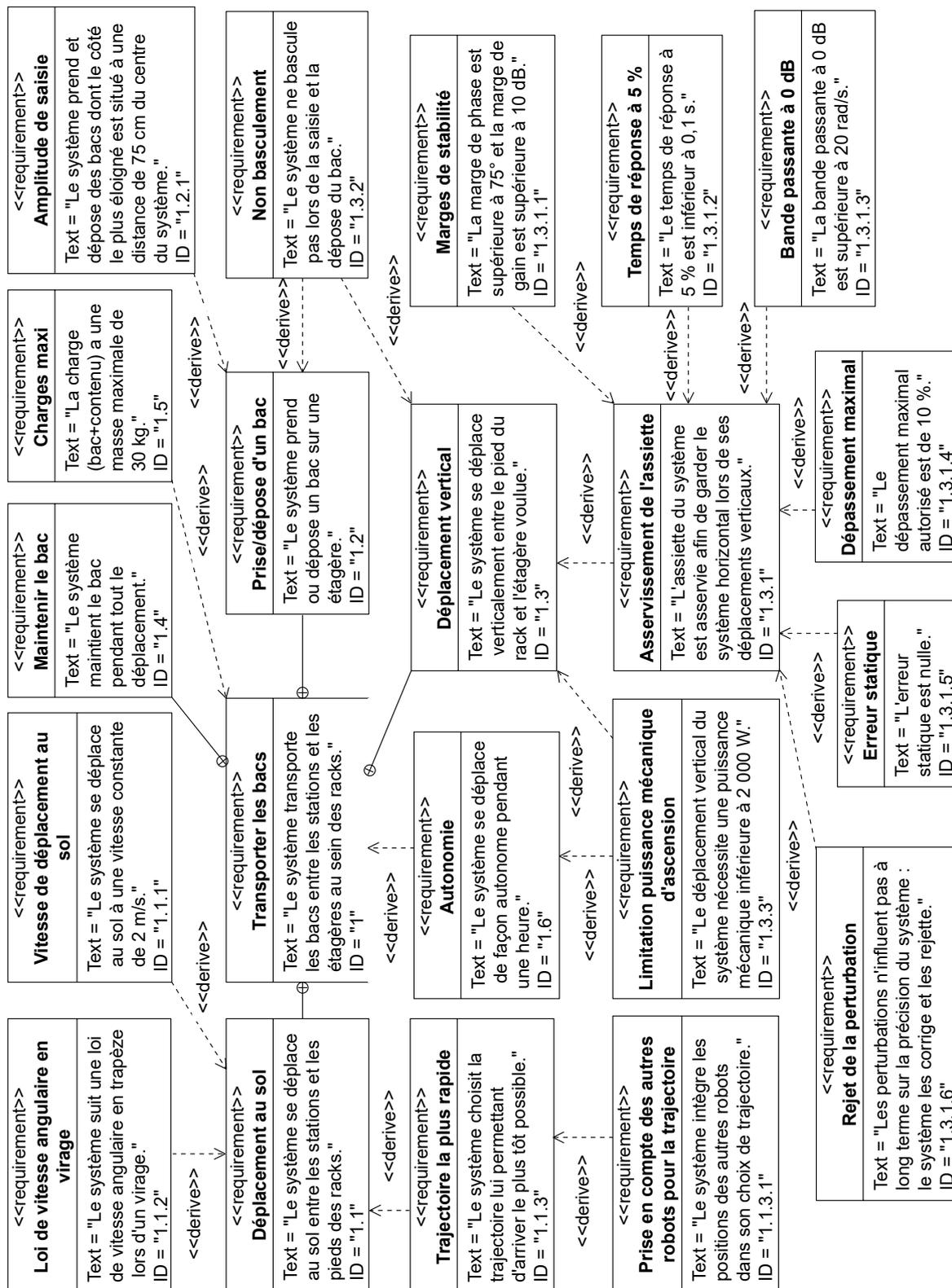


Figure 25 - Diagramme d'exigence extrait du cahier des charges du robot

FIN

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

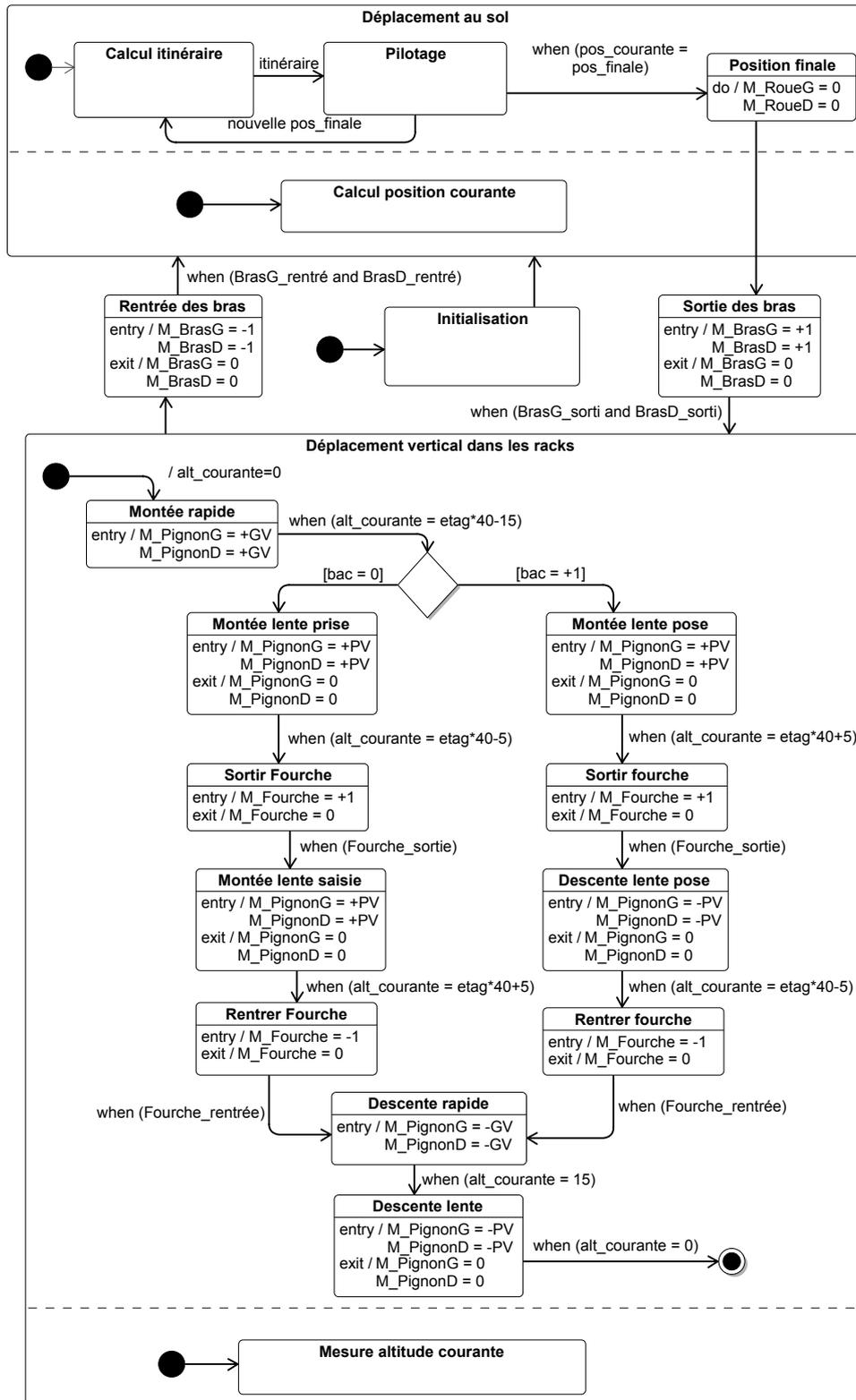
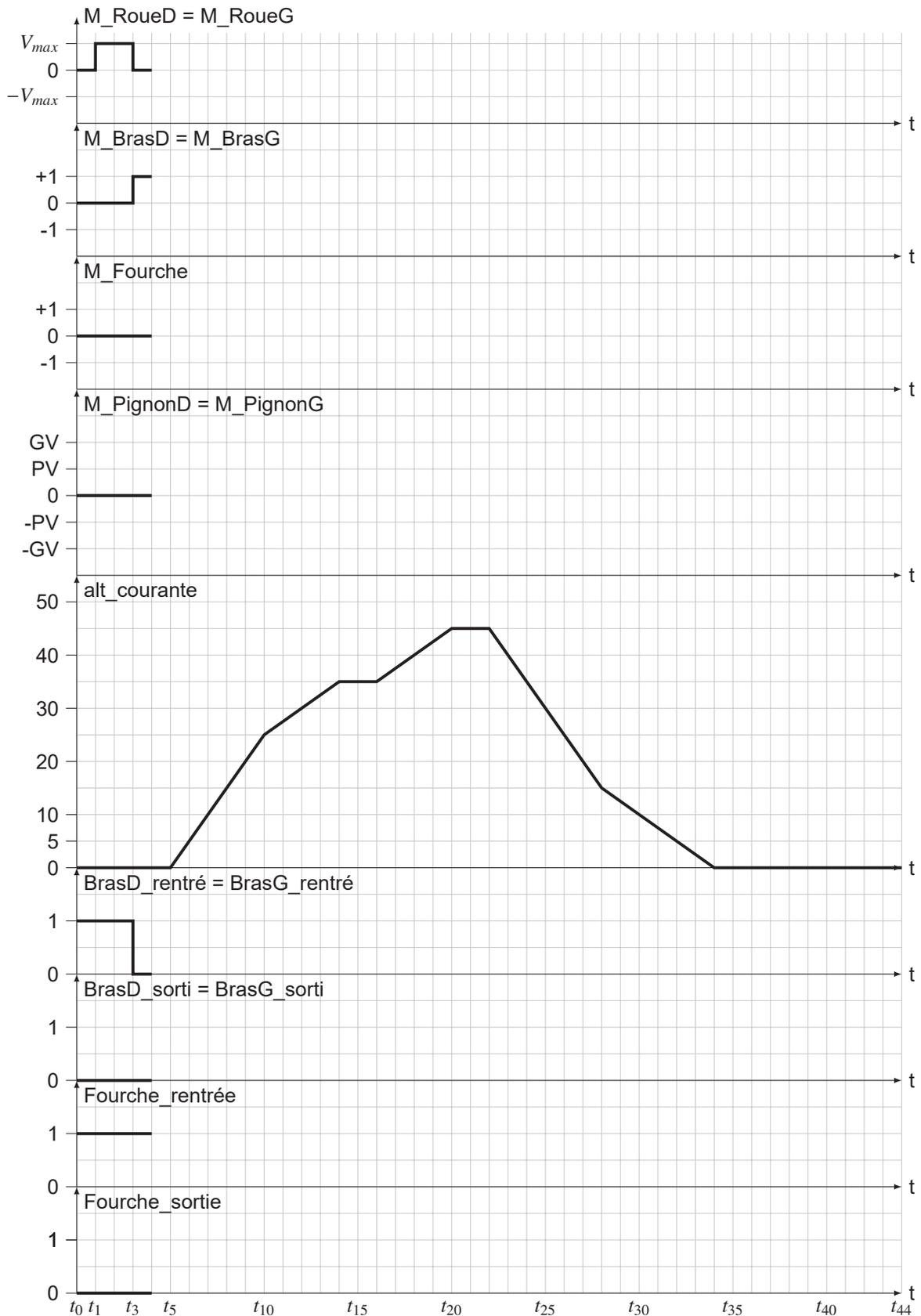


Figure 1 - Diagramme d'état décrivant le comportement du robot

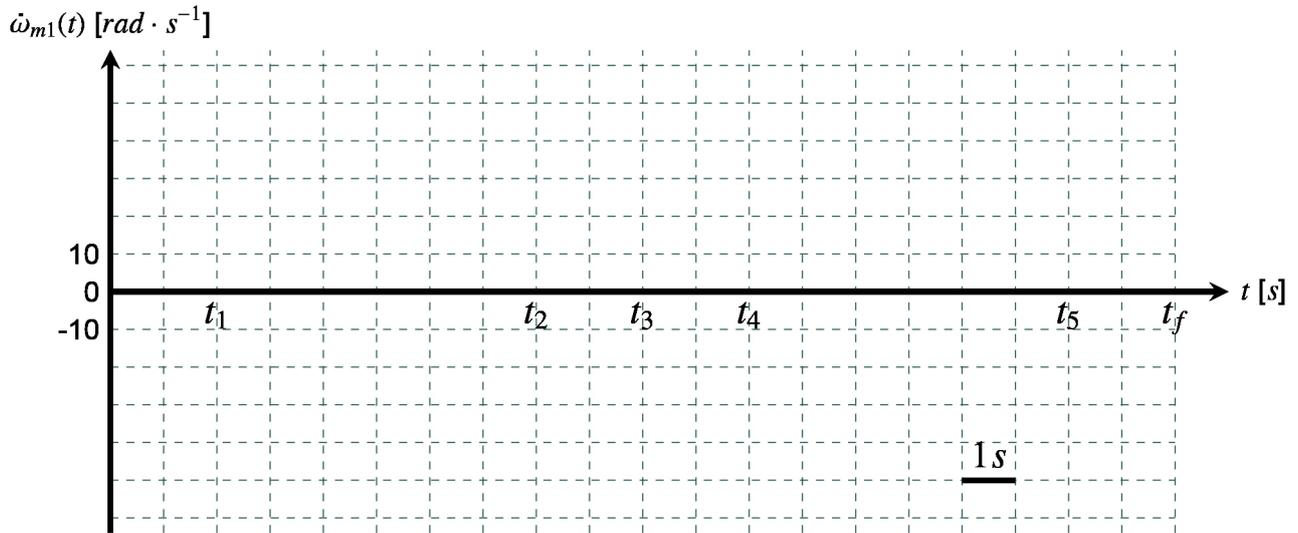
## DR1 - Comportement séquentiel du système

Q1. Compléter le chronogramme



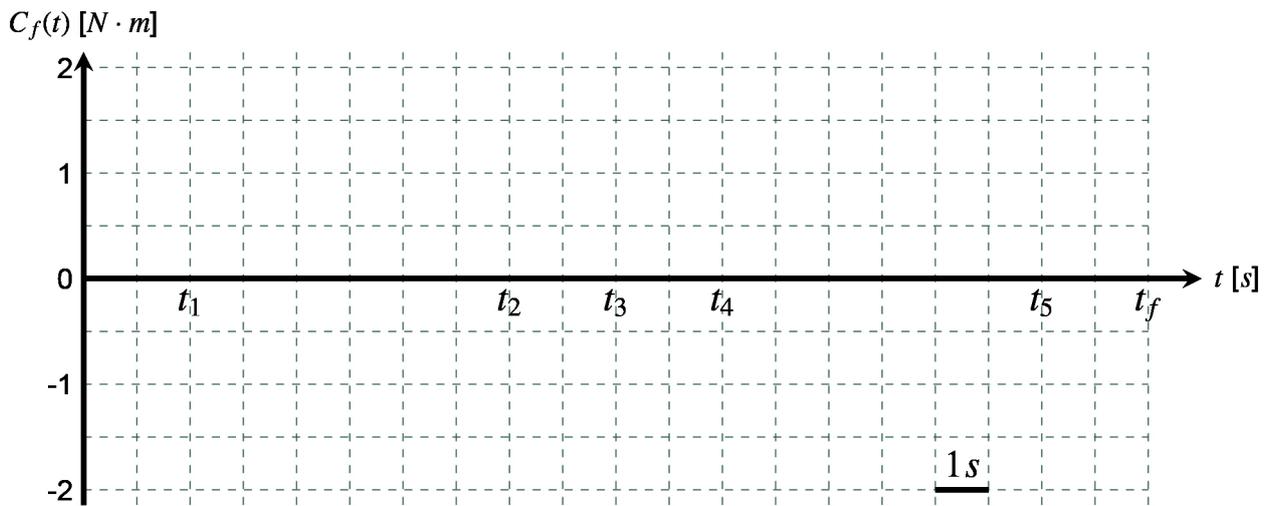
## DR2 - Évolution de l'accélération angulaire

Q14. Tracer l'évolution de  $\dot{\omega}_{m1}(t)$



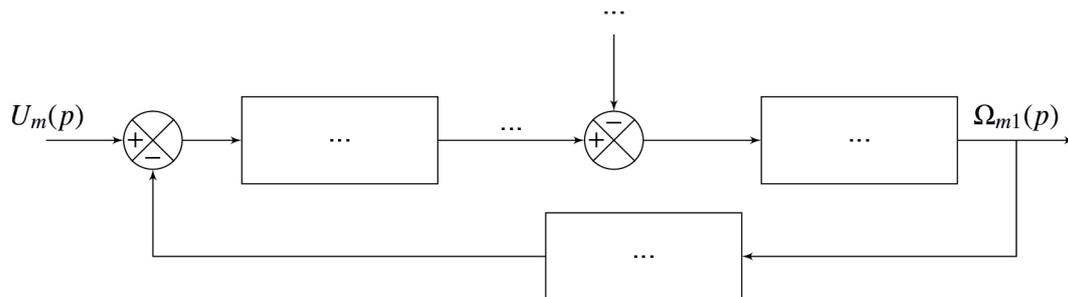
## DR3 - Évolution du couple $C_f$

Q15. Tracer l'évolution de  $C_f(t)$



## DR4 - Schéma-blocs associé à un moteur

Q17. Compléter le schéma-blocs



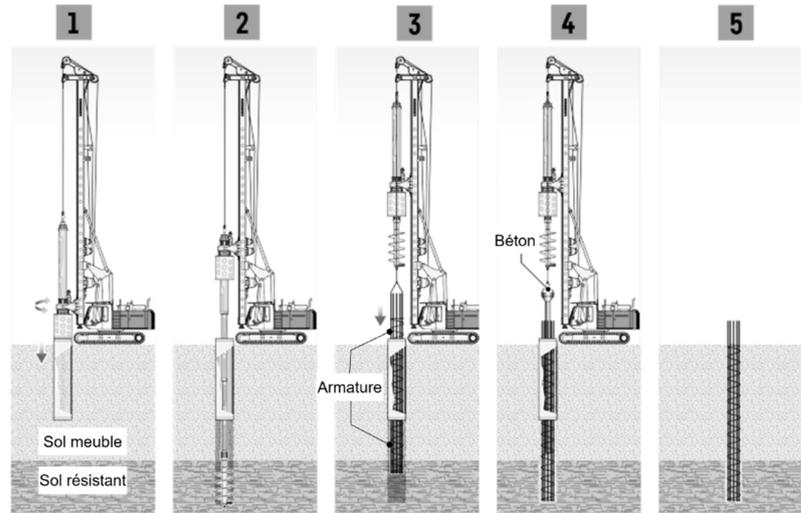
# Contrôle d'une machine de forage

## Présentation générale

Dans le domaine du génie civil, toute structure architecturale a besoin d'une fondation faisant office de liaison entre celle-ci et le sol. Elle permet d'assurer la transmission des charges et leur répartition dans le sol. Lorsque le sol résistant se trouve à une très grande profondeur, ou dans le cas d'une structure très importante, il est nécessaire de créer une fondation profonde composée de pieux en béton armé. L'excavation des terres se réalise alors grâce à un engin appelé foreuse (ou machine de forage).

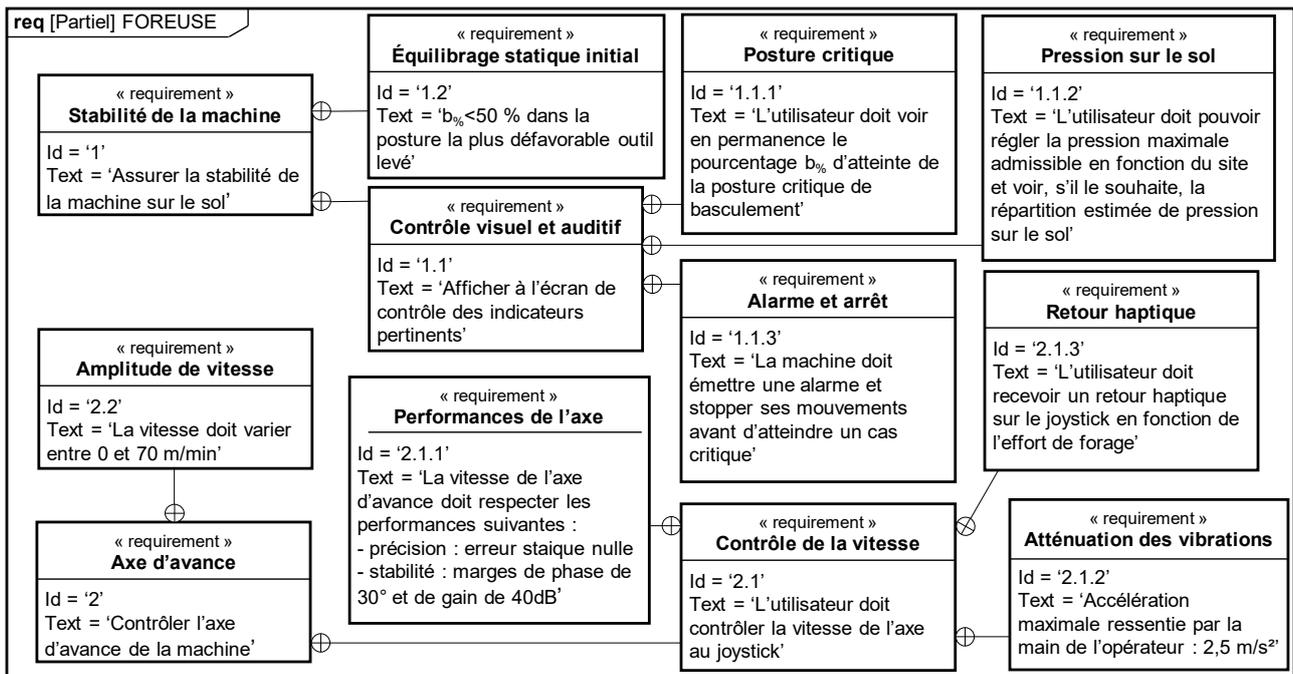
Comme l'illustre la **figure 1**, ces pieux de fondation profonde sont réalisés en plusieurs étapes :

- étape 1 : positionnement de la foreuse et de l'outil au-dessus du point d'implantation du pieu ;
- étape 2 : forage profond jusqu'au sol résistant ;
- étape 3 : mise en place de l'armature (treillis de fer) du pieu ;
- étape 4 : coulée du béton ;
- étape 5 : retrait de la machine et séchage du pieu.



**Figure 1** - Réalisation d'un pieu de forage profond

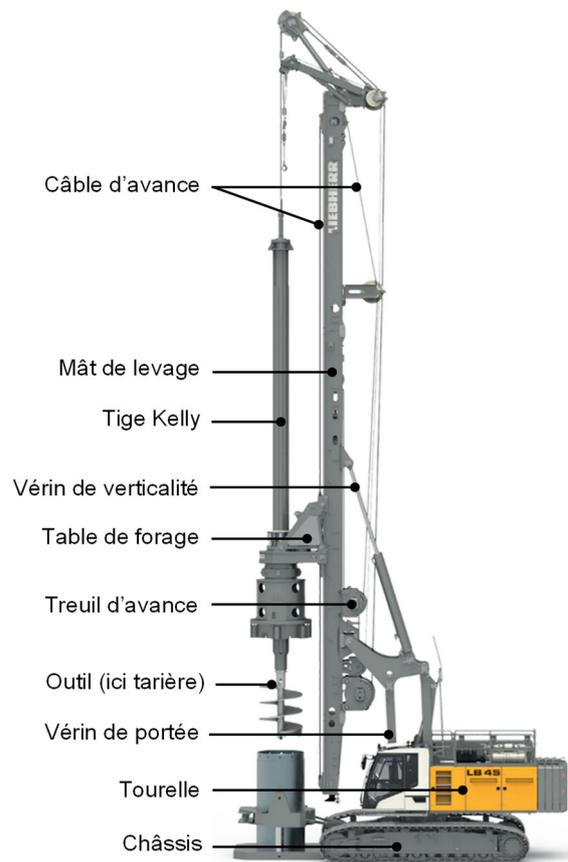
Une machine de forage est un système riche en sous-systèmes. Une description fonctionnelle partielle est donnée **figure 2** et une description structurelle, simplifiée, se situe en **figure 3**.



**Figure 2** - Diagramme des exigences partiel

Une tourelle, comportant la cabine de pilotage, les différents moteurs de la foreuse et des contrepoids à l'arrière, est montée sur un châssis équipé de chenilles. La tourelle est orientable autour d'un axe vertical à 360° par rapport au châssis et porte un mât de levage. Ce mât, dont la portée et la verticalité par rapport à la tourelle sont réglables à l'aide de vérins, guide une table de forage en translation grâce à un câble d'avance lui-même actionné par un treuil d'avance. En phase de forage, pendant que la table de forage descend, celle-ci actionne en rotation la tige Kelly au bout de laquelle est montée l'outil, généralement une tarière (vis sans fin). Le mouvement d'avance combiné au mouvement de rotation de l'outil permet le forage. De plus, on note que la table de forage est équipée d'un système de suspension permettant d'amortir, pour le reste de la machine, les vibrations dues aux efforts de forage.

Dans ce sujet, il ne sera étudié que la stabilité globale de la machine (**Partie I**) et l'axe d'avance (**Partie II**). Le contrôle de ces fonctionnalités est soumis aux exigences présentes dans le diagramme des exigences partiel de la **figure 2**. Enfin, une dernière partie explorera une manière d'éditer un rapport de chantier (**Partie III**). Toutes ces parties sont indépendantes.



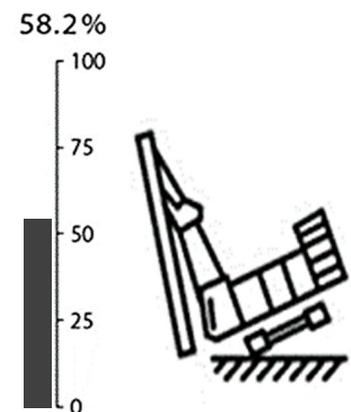
**Figure 3 - Principaux constituants d'une foreuse**

## Partie I - Contrôle de la stabilité de la machine de forage

Les objectifs de cette partie sont de valider l'exigence 1.2 et d'étudier ce que propose le constructeur face à l'exigence 1.1.

### 1.1 - Condition de basculement statique

En fonction de l'orientation de la tourelle par rapport au châssis et des efforts mis en jeu, il est possible que la machine de forage bascule. Ceci doit légitimement être évité. Pour cela, la connaissance de la position estimée du centre de gravité de la machine permet à l'ordinateur de bord d'afficher à tout instant sur l'écran de contrôle la marge de manœuvre possible avant basculement de la machine. La **figure 4** ci-contre illustre ce que l'opérateur peut observer dans un coin de son écran : le pourcentage  $b\%$  d'atteinte de la posture critique de basculement pour une orientation de tourelle donnée. On se propose dans cette sous-partie de retrouver comment l'ordinateur de bord génère ce résultat. Pour cela, on se base sur le paramétrage n° 1 de la machine, avec efforts ponctuels entre le sol et les chenilles, présent en **annexe 1** (page 16).



**Figure 4 - Aperçu du contrôle de  $b\%$**

**Q1.** Expliquer par un raisonnement simple mais détaillé pourquoi mesurer l'effort  $F_w$  dans le câble d'avance permet au constructeur, en quasi-statique, de connaître l'effort de forage  $F_{sol}$  sans mesurer ce dernier.

On suppose désormais que  $F_{sol}$  est estimé par l'expression  $F_{sol} = m \cdot g - 2 F_w$ . Sauf indications contraires, on néglige également les effets dynamiques.

**Q2.** En appliquant le principe fondamental de la statique en O à l'isolement de votre choix, donner l'expression de  $F_g$  et de  $F_d$  en fonction des données connues du système, de  $\theta$  et de  $F_{sol}$ .

Le problème étant symétrique pour  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  (tourelle orientée à droite) et  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  (tourelle orientée à gauche), on n'étudie par la suite que le basculement statique à droite.

**Q3.** Donner la condition en effort pour laquelle il y a basculement statique à droite. En absence d'effort de forage, en déduire la condition sur la position  $(r, \theta)$  du centre de gravité G pour laquelle le basculement à droite est alors évité.

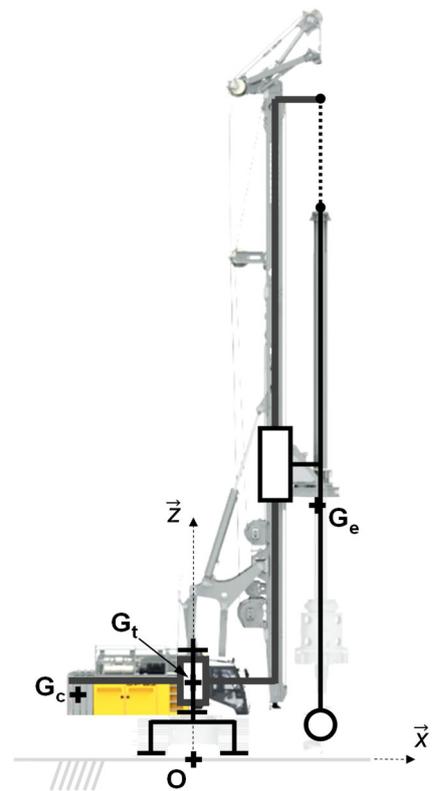
Interpréter physiquement ce résultat et montrer que  $b_{\%}$  peut être, dans ce cas, approximé par :

$$b_{\%} = 100 \frac{|r \cdot \cos(\theta)|}{a}$$

On désire dimensionner le nombre de contrepoids de 8 tonnes à placer à l'arrière de la tourelle pour que, en l'absence de forage et en extension maximale, l'exigence 1.2 d'équilibrage statique initial soit respectée même dans le pire des cas où la tourelle est pleinement orientée à droite ( $\theta = 0$ ). Dans cette posture, le schéma de la **figure 5** illustre où se situent, dans le même plan, les centres de gravité des différents éléments de la machine :

- $G_t$  est le centre de gravité de la tourelle et du châssis. La masse de cet ensemble  $S_t$  est notée  $m_t = 44,7$  tonnes ;
- $G_e$  est le centre de gravité de tous les équipements mobiles (tige Kelly, potences, vérins, mât, table de forage, outillage, terre à évacuer), positionnés dans la configuration la plus défavorable. La masse de cet ensemble  $S_e$  est notée  $m_e = 48,8$  tonnes.
- $G_c$  est le centre de gravité des contrepoids. Il y a  $n_{cp}$  contrepoids de masse totale  $m_c = n_{cp} \cdot m_1$ , où  $m_1 = 8$  tonnes est la masse d'un seul contrepoids.
- L'accélération de la pesanteur est notée :  $\vec{g} = -g \vec{z} = -9,8 \vec{z}$  (en  $m/s^2$ ).

On note (en mètres) :  $\vec{OG}_t = 2,2 \vec{z}$  ;  $\vec{OG}_e = 4,4 \vec{x} + 13 \vec{z}$  ;  $\vec{OG}_c = -4,3 \vec{x} + 2,3 \vec{z}$ . On fait l'hypothèse que  $\vec{OG}_c$  reste identique, indépendamment du nombre de contrepoids.



**Figure 5 -** Position des centres de gravité des différents solides

**Q4.** Exprimer la coordonnée sur  $\vec{x}$ , notée  $r$ , du centre de gravité G total de la machine en fonction des paramètres connus et de  $n_{cp}$ . En déduire le nombre  $n_{cp}$  minimum de contrepoids pour respecter l'exigence 1.2.

## 1.2 - Contrôle de la pression du sol

### 1.2.1 - Modélisation des actions mécaniques

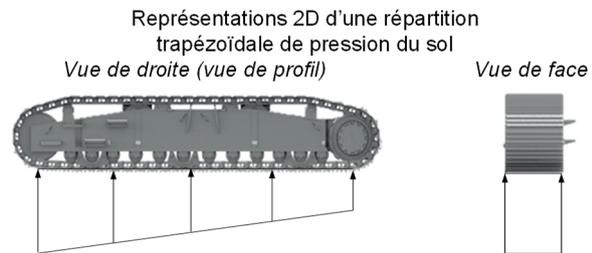
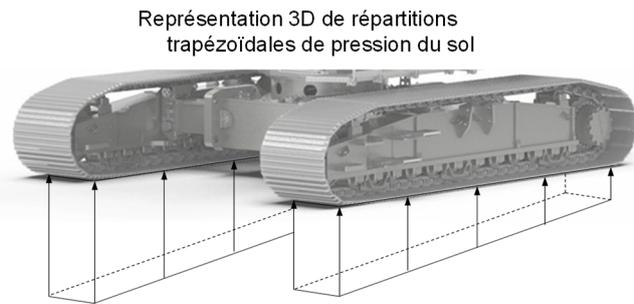
Le basculement de la machine n'est pas toujours dû à un déport trop important du centre de gravité de la machine, comme étudié dans la partie précédente, ou à un effort  $F_{sol}$  (estimé via  $F_w$ ) trop important. En effet, une fondation profonde a particulièrement du sens si le sol de surface n'est pas très résistant. Ainsi, si la foreuse exerce trop de pression sur ce sol, celui-ci peut s'affaisser, ce qui peut déstabiliser de manière critique la machine. La foreuse doit donc contrôler à tout instant, par estimation, la pression qu'elle exerce sur le sol (et donc que le sol exerce sur elle).

Le **tableau 1** récapitule les niveaux de pression que les sols peuvent supporter avant de risquer de s'affaisser.

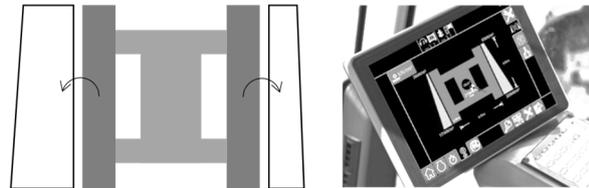
Type de sol	Rocher	Schiste argileux	Gravier compact	Asphalte	Sable compacté	Sable en vrac	Argile humide
Pression maximale admissible (kPa)	2 000	800	400	200	200	100	<100

**Tableau 1** - Pressions admissibles par le sol selon le type de sol

D'après les normes européennes, les efforts entre le sol et les chenilles ne doivent pas être modélisés comme ponctuels au centre de leur surface de contact comme cela a été supposé dans la partie précédente (avec  $F_d$  et  $F_g$ ). La répartition de pression du sol sur chaque chenille doit être modélisée comme trapézoïdale sur sa longueur et constante sur sa largeur. Un exemple de représentations 3D, 2D et "aplatie" (comme vue sur l'écran de contrôle dans la cabine) de telles répartition est donné sur la **figure 6**. Sur la vue "aplatie", la machine est vue de dessus et la visualisation de l'allure des pressions sous les chenilles est ramenée dans le plan de l'écran.



Représentation « aplatie » de répartitions trapézoïdales de pression du sol comme vue sur l'écran de contrôle : la machine est vue de dessus et la visualisation de l'allure des pressions sous les chenilles est ramenée dans le plan de l'écran.



**Figure 6** - Modèles de répartitions trapézoïdales de pression du sol sur les chenilles

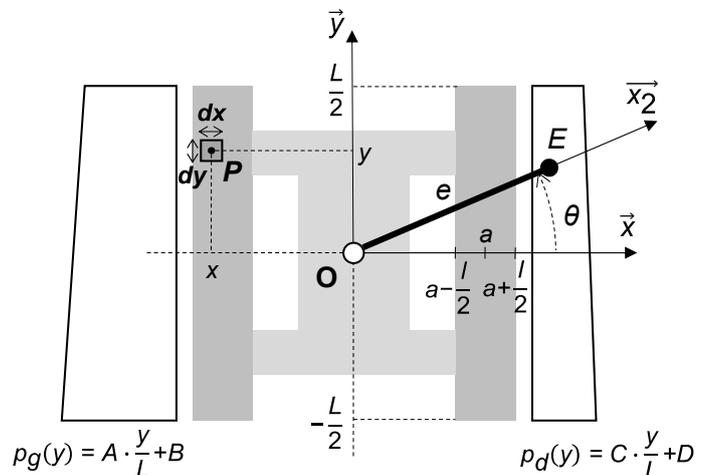
Un des rôles de l'ordinateur de bord est d'estimer ces répartitions de pression afin de vérifier que la pression maximale supportée par le sol (rentrée par l'utilisateur en fonction du site) n'est pas atteinte à un coefficient de sécurité près.

Si c'est le cas, l'ordinateur bloque tous les mouvements de la foreuse qui risqueraient d'empirer et renvoie une alarme.

On se propose dans cette sous-partie d'étudier cette estimation.

On base l'étude sur le paramétrage n° 2 de l'**annexe 1**, avec répartition de pression entre le sol et les chenilles. Puis, afin de résoudre le problème plus facilement, on somme les deux glisseurs (poids en  $G$  et sol en  $F$ ) pour en former un seul équivalent (en  $E$ ), comme visualisé sur la **figure 7** et noté

$$\vec{F}_{eq \rightarrow f} = F_{eq} \vec{z} \text{ où } F_{eq} \text{ est négatif.}$$



**Figure 7** - Simplification et modèle équivalent

**Q5.** Déterminer les expressions de  $F_{eq}$  et de  $e$  en fonction de  $M, m, F_w, R, r$  et de  $g$ .

La force élémentaire de réaction du sol 0 sur la chenille gauche  $cg$  est notée  $\overline{dF_{0 \rightarrow cg}(P)}$  :  
 $\overline{dF_{0 \rightarrow cg}(P)} = p_g(y) \vec{z} dx dy$ . La chenille droite est notée  $cd$ .

**Q6.** En déduire l'expression de la force élémentaire  $\overline{dF_{0 \rightarrow cg}(P)}$  et du moment élémentaire  $\overline{dM_{O,0 \rightarrow cg}(P)}$  au point O qu'exercent le sol sur la chenille gauche en un point P de contact en fonction de  $A$  et de  $B$ .

**Q7.** Déterminer à l'aide de la question précédente les expressions de l'effort  $\overline{F_{0 \rightarrow cg}}$  et du moment au point O  $\overline{M_{O,0 \rightarrow cg}}$  en fonction de  $B, D$  et des données connues du système.

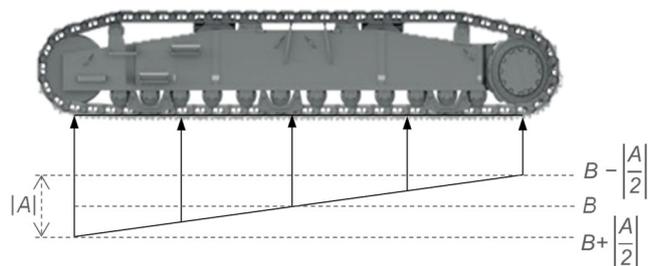
De même, on pourrait, par analogie, déterminer  $\overline{F_{0 \rightarrow cd}}$  et  $\overline{M_{O,0 \rightarrow cd}}$  en fonction de  $C$  et de  $D$ . Au final, on peut en déduire la force  $\overline{F_{0 \rightarrow \Sigma}}$  qu'exerce le sol sur la foreuse et le moment en O qu'exerce le sol sur la foreuse  $\overline{M_{O,0 \rightarrow \Sigma}}$  (via uniquement les chenilles gauche et droite).

Grâce à ces résultats, on trouve qu'à l'équilibre, les répartitions de pressions trapézoïdales doivent respecter le système d'équations (1).

$$\begin{cases} (D+B) \cdot L \cdot l = -F_{eq} \\ (C+A) \cdot \frac{L^2 \cdot l}{12} = -F_{eq} \cdot e \cdot \sin(\theta) \\ (D-B) \cdot L \cdot l \cdot a = -F_{eq} \cdot e \cdot \cos(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

**Q8.** Quels théorèmes généraux ont permis d'établir les trois équations scalaires du système d'équations (1) ?

La **figure 8** permet de remarquer que  $B$  (respectivement  $D$ ), toujours positive, est la pression moyenne de la répartition trapézoïdale gauche (respectivement droite) et que  $A$  (respectivement  $C$ ), positive ou négative, en est l'écart entre sa pression avant et arrière. Ainsi, la pression maximale du sol sur la chenille gauche vaut toujours  $B + \frac{|A|}{2}$  (respectivement  $D + \frac{|C|}{2}$  à droite).



**Figure 8** - Aperçu des expressions des pressions minimale, maximale et moyenne

Ainsi, pour estimer la pression maximale exercée au sol, l'ordinateur de bord estime d'abord la position de E et la valeur de  $F_{eq}$  en fonction des données renvoyées à tout instant par les capteurs présents sur les différents axes de la foreuse. Ensuite, il détermine les valeurs des pressions  $A, B, C$  et  $D$  grâce aux équations précédentes **avec l'hypothèse assez réaliste où  $C = A$**  et en déduit la pression maximale. Enfin, il renvoie à l'écran la visualisation "aplatie" des distributions de pression et sonne l'alarme en cas d'approche de la pression maximale autorisée rentrée par l'utilisateur.

**Q9.** Après avoir précisé l'expression des paramètres  $A, B, C$  et  $D$ , donner l'expression de la pression maximale de chacune des répartitions estimées (gauche et droite) en fonction des données connues par la machine ( $L, l, a, e, \theta$  et  $F_{eq}$  uniquement).

En déduire que l'expression unique de la pression maximale sous la foreuse s'écrit :

$$p_{\max} = \frac{-F_{eq}}{2 \cdot L \cdot l} \left( 1 + \frac{e \cdot |\cos(\theta)|}{a} + \frac{6 \cdot e \cdot |\sin(\theta)|}{L} \right).$$

Toutefois, il est important de nuancer que la pression du sol sur la foreuse ne peut physiquement pas être négative. C'est pourquoi, lorsque la pression minimale calculée d'une répartition trapézoïdale devient négative ( $B - \left| \frac{A}{2} \right|$  pour la chenille gauche ou  $D - \left| \frac{C}{2} \right|$  pour la droite), l'ordinateur de bord se doit de changer son modèle de répartition de pression trapézoïdale pour une répartition triangulaire où la pression minimale est imposée à 0 Pa. Dans ces moments-là, l'hypothèse où  $C = A$  est rompue pour continuer à respecter le système d'équation précédent. On peut alors montrer dans ce cas que la pression maximale s'exprime de la façon suivante :

$$p_{\max} = \frac{-e \cdot F_{eq}}{L \cdot l} \left( \frac{|\cos(\theta)|}{a} + \frac{6 \cdot |\sin(\theta)|}{L} \right).$$

## 1.2.2 - Étude séquentielle

En résumé, pour évaluer la pression du sol sous la foreuse, l'ordinateur de bord réalise en permanence les étapes suivantes :

- évaluation de la position de  $G$  et de  $F$  et mesure de l'effort  $F_w$ . Déduction de la position de  $E$  et de l'effort  $F_{eq}$  et évaluation du pourcentage  $b\%$  d'atteinte de la posture critique de basculement ;
- évaluation de la pression minimale  $p_{\min}$  dans le cas de répartitions trapézoïdales de pression :

$$p_{\min} = \frac{-F_{eq}}{2 \cdot L \cdot l} \left( 1 - \frac{e \cdot |\cos(\theta)|}{a} - \frac{6 \cdot e \cdot |\sin(\theta)|}{L} \right) ;$$

- dans le cas d'une pression minimale positive, calcul de la pression maximale  $p_{\max}$  :

$$p_{\max} = \frac{-F_{eq}}{2 \cdot L \cdot l} \left( 1 + \frac{e \cdot |\cos(\theta)|}{a} + \frac{6 \cdot e \cdot |\sin(\theta)|}{L} \right) ;$$

- dans le cas d'une pression minimale négative, calcul de la pression maximale  $p_{\max}$  :

$$p_{\max} = \frac{-e \cdot F_{eq}}{L \cdot l} \left( \frac{|\cos(\theta)|}{a} + \frac{6 \cdot |\sin(\theta)|}{L} \right) ;$$

- comparaison de  $p_{\max}$  avec la valeur  $p_{sol}$  maximale autorisée ;
- dans le cas où la valeur de  $p_{\max}$  dépasse la valeur de  $p_{sol}$ , ou si  $b\%$  dépasse 90 %, sonnerie de l'alarme et blocage des mouvements en cours de la foreuse jusqu'à ce que l'opérateur appuie sur l'arrêt d'urgence donnant accès à un mode de dégagement non-détaillé ici. La variable booléenne traduisant l'arrêt d'urgence est notée **ARU** et vaut 1 si l'arrêt est enclenché, 0 sinon ;
- redémarrage du travail normal de la foreuse et du contrôle de sa stabilité une fois le dégagement terminé et l'arrêt d'urgence désenclenché. La variable booléenne de la fin de dégagement est notée **FinDeg** et vaut 1 si la demande de fin est enclenchée, 0 sinon.

Ce fonctionnement séquentiel est illustré par le diagramme d'états du **Document Réponse DR1**.

**Q10.** À l'aide de la description du fonctionnement séquentiel précédente, compléter les cinq transitions manquantes du diagramme d'états fourni dans le **DR1**.

On propose sur le croquis du bas du **DR2** une chronologie d'événements : déploiement, orientation puis positionnement de la tourelle. L'évolution théorique des pressions estimées par l'ordinateur et du pourcentage d'atteinte de la posture critique de basculement qui découle de ces événements est aussi donnée sur le **DR2**.

**Q11.** Grâce au diagramme d'états complété, surligner sur le **DR2** la valeur de  $p_{\max}$  retenue par l'ordinateur de bord au cours du temps. Indiquer clairement sur le **DR2** l'instant où l'alarme se déclenchera sachant que ces opérations se déroulent sur du gravier compact (voir **tableau 1**) et que l'opérateur a réglé  $p_{sol}$  à la limite maximale de ce matériau sans coefficient de sécurité.

**Q12.** Résumer en quoi les estimations de  $b\%$  et de  $p_{sol}$  par la machine sont des indicateurs pertinents et complémentaires pour le contrôle de la stabilité, afin de satisfaire l'exigence 1.1.

## Partie II - Contrôle de la vitesse de la table de forage

Comme en usinage classique, la qualité d'un forage dépend énormément de la vitesse de rotation de l'outil ainsi que de sa vitesse d'avance. On souhaite maîtriser cette dernière par un asservissement en vitesse de la table de forage le long du mât de levage. L'objectif sera, dans cette partie, de valider les exigences de performances de l'axe (id. 2.1.1). Le schéma-bloc de l'**annexe 5** modélise toutes les parties du système à étudier pour obtenir un modèle de connaissance de cet asservissement.

### II.1 - Sous ensemble " Mécanisme " : étude cinématique de la table de forage

On s'intéresse ici à la partie " Mécanisme " du schéma-bloc. Pour cela, il est nécessaire d'établir tout d'abord le lien entre la vitesse de rotation  $\omega_w$  du treuil d'avance ("crowd winch") et la vitesse  $V$  de déplacement de la table de forage. Ainsi, on travaillera désormais sur la modélisation proposée **figure 9**. Le schéma de gauche modélise notamment le système complet en trois dimensions.

Le système est constitué :

- d'un moteur hydraulique, suivi d'un réducteur à engrenages non représenté mettant en rotation le winch **1**. Ce dernier est en liaison pivot d'axe  $(A; \vec{x})$  avec le châssis **0** (immobile par rapport au sol). Le tambour de ce winch permet de tracter un câble qui s'enroule autour de celui-ci. Le rayon d'enroulement, noté  $R_1$ , est supposé constant. La vitesse de rotation du tambour du winch autour de son axe est notée  $\omega_w = \omega_1 = \omega_{1/0}$  ;
- de trois poulies **2**, **2'** et **2''** chacune en liaison pivot avec le châssis d'axes respectifs  $(B; \vec{x})$ ,  $(B'; \vec{x})$ ,  $(B''; \vec{x})$ . Elles ont toutes trois un rayon  $R_2$  ;
- de deux poulies mobiles **3** et **3'** en liaison pivot avec la table de forage **4**, d'axes respectifs  $(C; \vec{y})$  et  $(C'; \vec{y})$ . Elles sont de même rayon  $R_3$  et on note  $\omega_3 = \omega_{3/4}$  leur vitesse de rotation autour de leur axe ;
- de la table de forage **4**, mise en mouvement grâce au câble et par l'intermédiaire des poulies **3** et **3'**, qui est en liaison glissière de direction  $\vec{z}$  avec le châssis **0**. On note  $V$  la vitesse d'avance de la table de forage telle que  $\overrightarrow{V(D,4/0)} = V \vec{z}$  ;
- du câble, supposé inextensible, qui est attaché à ses extrémités au châssis au niveau des points  $O$  et  $O'$ . On suppose de plus que le câble s'enroule sans glisser autour de toutes les poulies et du tambour du winch d'avance.

Remarque : l'ensemble noté **5** avec le système d'amortisseur sera étudié ultérieurement.

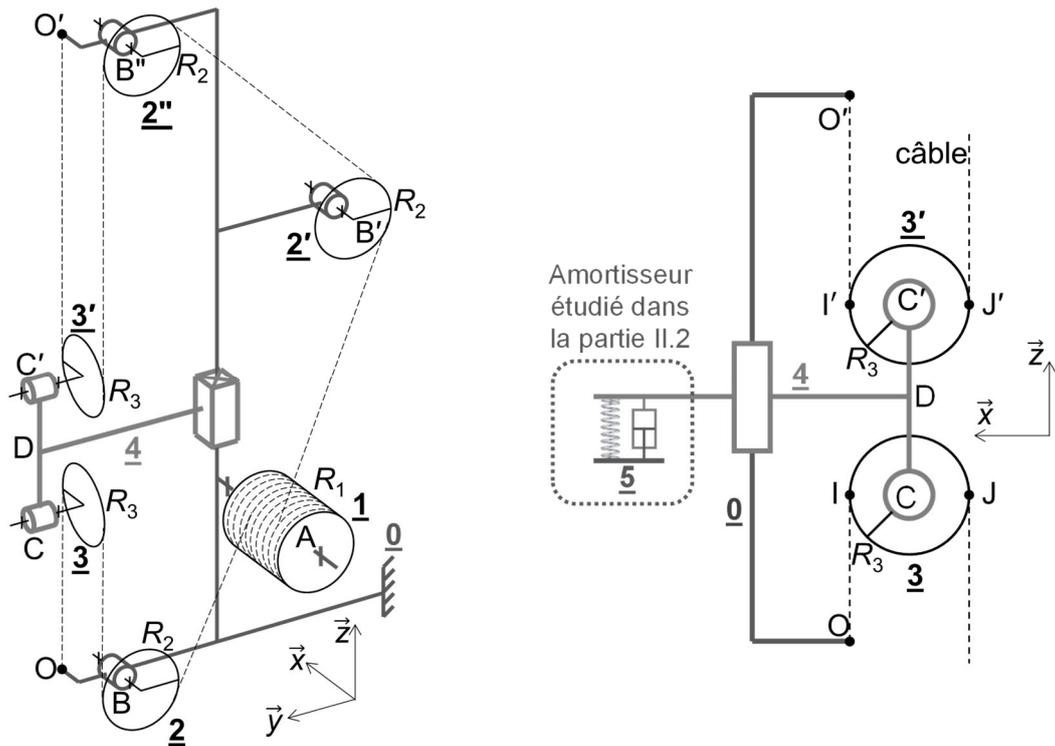
Le schéma de droite de la **figure 9** (schéma cinématique dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ ) représente uniquement la partie du système constitué du châssis **0**, de la table de forage **4** et des deux poulies **3** et **3'**. On introduit deux points mobiles I et J, marquant le début et la fin de l'enroulement du câble autour de la poulie **3**. Par analogie, on a les points I' et J' pour la poulie **3'**.

On a alors :  $\overline{CI} = \overline{C'I'} = \overline{JC} = \overline{J'C'} = R_3 \vec{x}$ .

La condition de roulement sans glissement du câble sur la poulie **3** et sur le tambour **1**, associée à la composition du mouvement au point I, permettent de trouver l'équation suivante :

$$\overrightarrow{V(J,4/0)} \cdot \vec{z} = \left( \overrightarrow{V(J,4/3)} + \overrightarrow{V(J,3/\text{câble})} + \overrightarrow{V(J,\text{câble}/0)} \right) \cdot \vec{z} = V = -R_3 \cdot \omega_3 + R_1 \cdot \omega_1.$$

**Q13.** De la même manière, en utilisant la composition des vitesses au point I et en exprimant une condition de roulement sans glissement, montrer que :  $\overrightarrow{V(I,4/0)} \cdot \vec{z} = V = R_3 \cdot \omega_3$ .



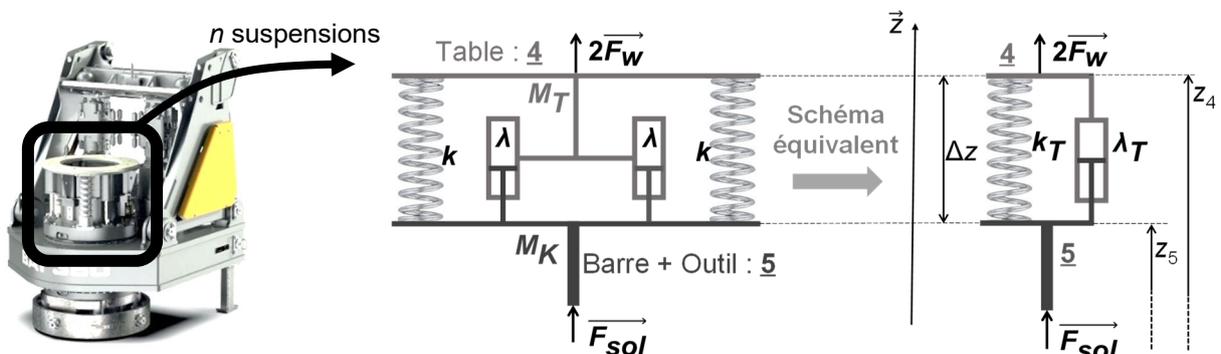
**Figure 9** - Schéma cinématique 3D du système d'entraînement de la table de forage (à gauche) ; vue 2D simplifiée (à droite)

**Q14.** Déduire de la question précédente l'expression du rayon équivalent, noté  $R_{eq}$ , dans le sous-système " Mécanisme " du schéma-bloc fourni en **annexe 5**, en fonction de  $R_1$  seulement.

Un réducteur à engrenages de rapport de réduction  $k_r$  permet d'adapter la vitesse de rotation du moteur hydraulique  $\omega_m(t)$ , tel que :  $\omega_w(t) = k_r \cdot \omega_m(t)$ .

## II.2 - Partie " Amortisseur " : étude dynamique de la table de forage

Afin de modéliser l'asservissement en vitesse de la table de forage, il est possible de prendre en compte que, lors de l'étape de forage, un système d'" amortisseurs Kelly " (suspensions) permet d'amortir les chocs et vibrations. Chaque suspension est composée d'un ressort de raideur  $k$  et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $\lambda$ . Il y a  $n$  suspensions équiréparties autour de l'axe de la tige Kelly (soient  $n$  ressorts et  $n$  amortisseurs) disposées en parallèle, comme l'indique le schéma de la **figure 10**. On précise que le guidage entre la table **4** et l'ensemble **5** est réalisé par une liaison glissière parfaite, non représentée.



**Figure 10** - Modélisation de liaison entre la table et la barre Kelly lors du forage

On note  $z_4$  la position verticale de la table **4** de masse  $M_T$  et  $z_5$  la position verticale de l'ensemble **5** {barre+outil} de masse  $M_K$ . Elles sont toutes deux établies par rapport à une référence fixe, liée au châssis de la foreuse. L'allongement instantané du ressort est noté  $\Delta z = z_4 - z_5$ . De plus, on note :

- $\Delta z_0$  : la valeur de l'allongement du ressort à vide ;
- $\Delta z_e$  : la valeur de l'allongement du ressort à l'équilibre (**5** suspendu sans action du sol sur lui).

#### Bilan des actions mécaniques :

- action de traction du câble sur la table **4**, modélisée par une force verticale  $2F_w \vec{z}$ . Cette force de traction s'écrit  $2F_w$ , sachant que :  $2F_w = 2F_{we} + \delta F_w$  où :
  - $F_{we}$  est la force de maintien à l'équilibre de l'ensemble **{4+5}** (sans autre action supplémentaire),
  - $\delta F_w$  est la variation de cette force autour de la force  $F_{we}$  de maintien à l'équilibre ;
- action du sol sur l'ensemble **5**, modélisée par une force verticale  $F_{sol} \vec{z}$  ;
- action de la pesanteur : l'accélération de la pesanteur sera notée  $\vec{g} = -g \vec{z}$  ;
- action d'un ressort de raideur  $k$  sur la table **4** :  $\vec{F}_r = k \cdot (\Delta z_0 - \Delta z) \vec{z}$  ;
- action d'un amortisseur sur la table **4** :  $\vec{F}_a = -\lambda \cdot (\dot{z}_4 - \dot{z}_5) \vec{z} = -\lambda \cdot \Delta \dot{z} \vec{z}$ .

On souhaite simplifier la modélisation en retenant le schéma équivalent de droite sur la **figure 10**. Dans ce cas, l'action de l'ensemble des  $n$  ressorts et des  $n$  amortisseurs s'exprime par :

- $\vec{F}_{nr} = k_T \cdot (\Delta z_0 - \Delta z) \vec{z}$  ;
- $\vec{F}_{na} = -\lambda_T \cdot \Delta \dot{z} \vec{z} = -\lambda_T \cdot \frac{d\Delta z}{dt} \vec{z}$ .

Toutes les suspensions (ressorts et amortisseurs) ont une masse négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu.

**Q15.** Exprimer  $k_T$  et  $\lambda_T$  en fonction de  $n$ ,  $k$  et de  $\lambda$ .

**Q16.** À l'équilibre, système suspendu, proposer et mettre en œuvre une stratégie de résolution en appliquant le principe fondamental de la statique, afin d'établir une première équation, liant  $k_T$ ,  $\Delta z_e$ ,  $\Delta z_0$ ,  $M_K$  et  $g$  et une deuxième, liant  $F_{we}$ ,  $M_K$ ,  $M_T$  et  $g$ .

**Q17.** En fonctionnement, isoler la table **4** et déterminer son équation du mouvement vertical  $\ddot{z}_4(t)$  en fonction des paramètres du problème en utilisant une équation issue du principe fondamental de la dynamique.

Par analogie, l'équation du mouvement vertical de l'ensemble **5** {barre+outil} s'écrit :

$$M_K \cdot \ddot{z}_5(t) = F_{sol} - k_T \cdot (\Delta z_0 - \Delta z(t)) + \lambda_T \cdot \Delta \dot{z}(t) - M_K \cdot g.$$

On pose le changement de variables suivant :  $z_5(t) = \hat{z}_5(t) - \frac{\Delta z_e}{2}$  et  $z_4(t) = \hat{z}_4(t) + \frac{\Delta z_e}{2}$ , permettant de s'affranchir des actions de la pesanteur. On rappelle que  $\Delta z_e$  est constant.

**Q18.** En utilisant les résultats précédents et le changement de variables précédent, montrer que l'on obtient le système d'équations **(2)** suivant :

$$\begin{cases} M_T \cdot \ddot{\hat{z}}_4(t) + \lambda_T \cdot \dot{\hat{z}}_4(t) + k_T \cdot \hat{z}_4(t) = \lambda_T \cdot \dot{\hat{z}}_5(t) + k_T \cdot \hat{z}_5(t) + \delta F_w \\ M_K \cdot \ddot{\hat{z}}_5(t) + \lambda_T \cdot \dot{\hat{z}}_5(t) + k_T \cdot \hat{z}_5(t) = \lambda_T \cdot \dot{\hat{z}}_4(t) + k_T \cdot \hat{z}_4(t) + F_{sol} \end{cases} \quad (2)$$

Pour une fonction temporelle  $f(t)$  ou  $F(t)$ , on note sa transformée de Laplace  $F(p) = L[f(t)]$ . Les conditions initiales sont considérées être toutes nulles dans tout le sujet.

**Q19.** Traduire le système différentiel précédent **(2)** dans le domaine de Laplace, puis en déduire les expressions des trois fonctions de transfert  $H_6(p)$ ,  $H_7(p)$  et  $H_8(p)$  présentes sur l'**annexe 5** (zone encadrée notée " Amortisseur " en précisant que  $L[\dot{z}_4(t)] = V(p)$ ).

### II.3 - Sous-systèmes Servo-pompe, Circuit hydraulique et Moteur hydraulique

Ces sous-systèmes sont représentés sur le schéma-bloc de l'**annexe 5**. Le dispositif de positionnement de la table de forage et de son outil utilisent de l'énergie hydraulique. Les modèles de connaissance pour ces systèmes hydrauliques sont donnés ci-dessous :

- Le dispositif est contrôlé par une électrovanne proportionnelle de gain  $K_s$ . Le débit disponible est noté  $q_p$ , la tension délivrée par la partie commande est notée  $U_s$  et on a :

$$q_p(t) = K_s \cdot U_s(t) \quad (i)$$

- Les équations de mécanique des fluides dans un circuit fermé permettent d'écrire :

$$\frac{V_0}{B} \cdot \frac{d\Delta p(t)}{dt} = q_p(t) - q_m(t) \quad (ii)$$

$V_0$  désigne le volume dans le circuit et  $B$  est le coefficient de compressibilité du fluide.  $\Delta p$  désigne une différence de pression dans le circuit et  $q_m$  un débit retour.

- Les lois de comportement hydromécanique permettent d'introduire le lien entre la vitesse de rotation du moteur hydraulique  $\omega_m$  et le débit  $q_m$  d'une part et entre le couple moteur et le différentiel de pression  $\Delta p$  d'autre part. On note  $C_Y$  la cylindrée du moteur et on a :

$$q_m(t) = C_Y \cdot \omega_m(t) \quad (iii)$$

$$C_m(t) = C_Y \cdot \Delta p(t) \quad (iv)$$

- L'équation du mouvement du mécanisme s'écrit :

$$J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + a \cdot \omega_m(t) = C_m(t) - C_r(t) \quad (v)$$

où  $J_{eq}$  est l'inertie équivalente des solides en mouvement ramenée sur l'axe de rotation du moteur,  $a$  un coefficient de frottement visqueux équivalent et  $C_r$  modélisant les couples résistants autres que ceux dus au frottement visqueux.

**Q20.** D'après les **figures 9** et **10** et sans détailler les calculs, indiquer par quel théorème et par quel isolement peut être obtenue l'équation **(v)**. Sans la mettre en œuvre, proposer une méthode permettant de déterminer l'expression théorique du paramètre  $J_{eq}$ .

**Q21.** Traduire les cinq équations **(i)**, **(ii)**, **(iii)**, **(iv)** et **(v)** dans le domaine de Laplace.

**Q22.** Expliciter les cinq fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$ ,  $H_4(p)$  et  $H_5(p)$  à partir des résultats de la question précédente.

# ANNEXE 1 - Paramétrage mécanique

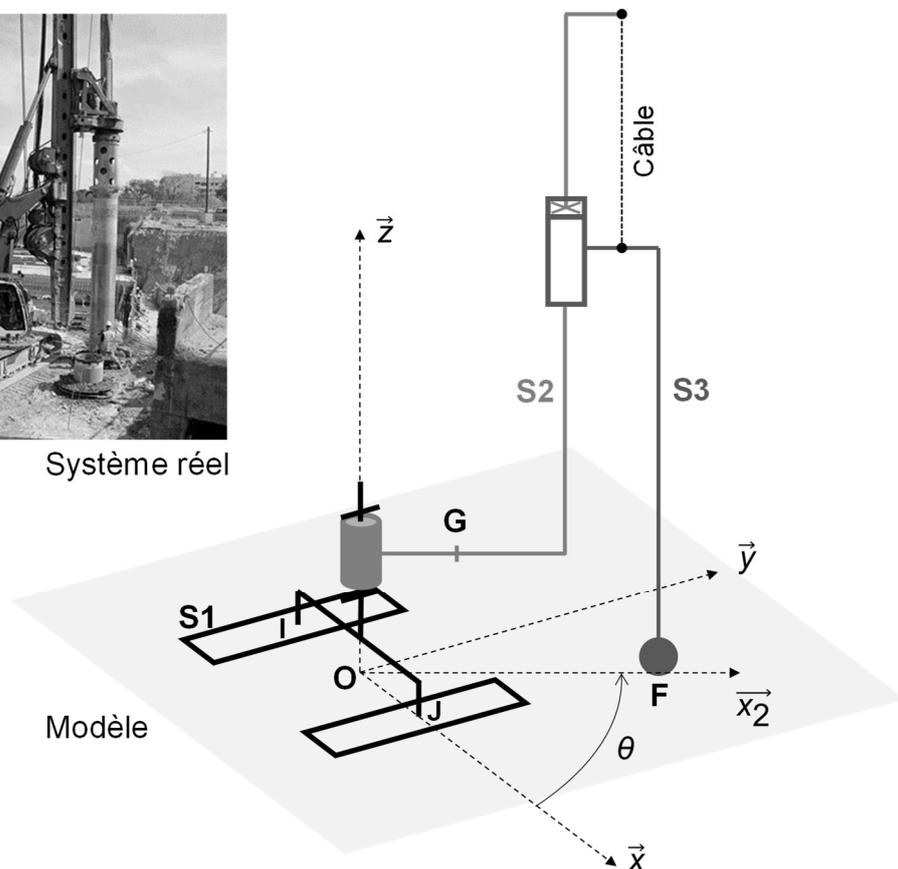
## Paramètres généraux :

Soient :

- $\mathbf{0}$  le sol, **S1** le châssis de la foreuse, **S2** sa tourelle et son mât et **S3** l'ensemble {table de forage + outil} ;
- $\mathfrak{R}_0 = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère attaché aux solides **S0** et **S1** ;
- $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  la base attachée aux solides **S2** et **S3** telle que  $(\vec{x}, \vec{x}_2) = \theta$  où  $\theta$  est connu ;
- $\Sigma = \{\mathbf{S1}, \mathbf{S2}, \mathbf{S3}\}$  l'ensemble de la foreuse, de centre de gravité  $G$  tel que  $\overline{OG} = r \vec{x}_2 + z_G \vec{z}$  ;
- $M = 186,5 \text{ tonnes}$  la masse de l'ensemble  $\Sigma$  et  $m = 18 \text{ tonnes}$  la masse de **S3** seul ;
- $2F_w \vec{z}$ , connu, l'effort du câble d'avance sur **S3**. La masse du câble est négligée dans la suite ;
- $F_{sol} \vec{z}$ , inconnu, l'effort de forage du sol  $\mathbf{0}$  sur l'outil de forage **S3** au point F, connu, défini par  $\overline{OF} = R \vec{x}_2$  ;
- $-g \vec{z}$  où  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ , l'accélération de la pesanteur terrestre.



Système réel



Modèle

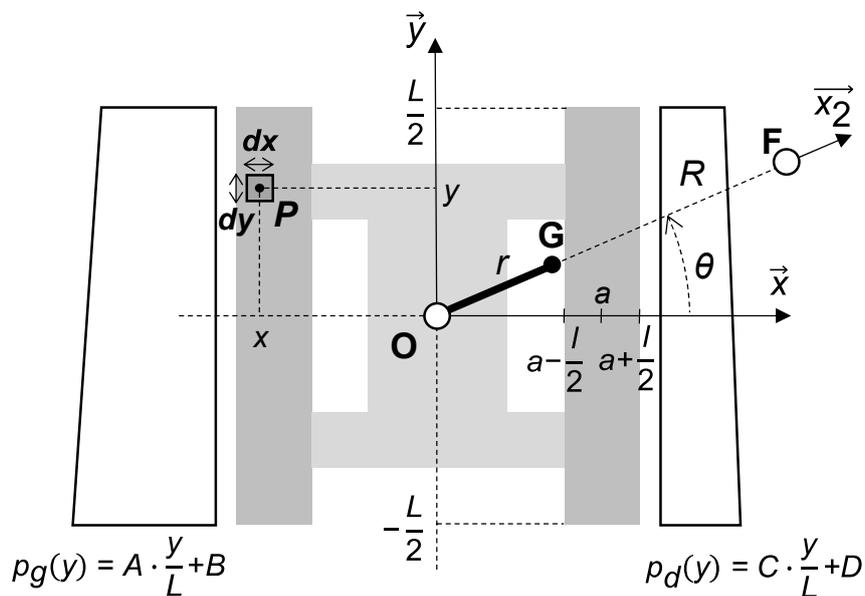
## Paramétrage n° 1 : modèle avec efforts ponctuels entre le sol et la foreuse

- $F_g \vec{z}$ , inconnu, l'effort du sol  $\mathbf{0}$  sur **S1**, supposé ponctuel au centre I de la surface de contact entre la chenille gauche  $cg$  et le sol tel que  $\|\overline{OI}\| = a = 2,1 \text{ m}$  ;
- $F_d \vec{z}$ , inconnu, l'effort du sol  $\mathbf{0}$  sur **S1**, supposé ponctuel au centre J de la surface de contact entre la chenille droite  $cd$  et le sol tel que  $\|\overline{OJ}\| = a = 2,1 \text{ m}$ .

## Paramétrage n° 2 : modèle avec répartition de pression entre le sol et la foreuse

On note :

- $P(x,y,0)$ , un point courant de contact entre le sol et les chenilles. Attention,  $x$  est négatif sur la figure ci-dessous. Les grandeurs  $dx$  et  $dy$  sont les dimensions du domaine surfacique élémentaire autour du point  $P$  entre le sol et les chenilles ;
- $p_g(y) = A \cdot \frac{y}{L} + B$ , la pression du sol 0 sur la chenille gauche  $cg$  au point  $P(x,y,0)$  où  $A$  et  $B$ , homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;
- $p_d(y) = C \cdot \frac{y}{L} + D$ , la pression du sol 0 sur la chenille droite  $cd$  au point  $P(x,y,0)$  où  $C$  et  $D$ , homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;
- $L = 5,4 \text{ m}$ , la longueur et  $l = 1 \text{ m}$  la largeur de chaque chenille ;
- $a = 2,1 \text{ m}$ , la distance moyenne sur l'axe  $\vec{x}$  d'une chenille au centre  $O$  de la machine.



## ANNEXE 2 - Rappels des syntaxes en Python

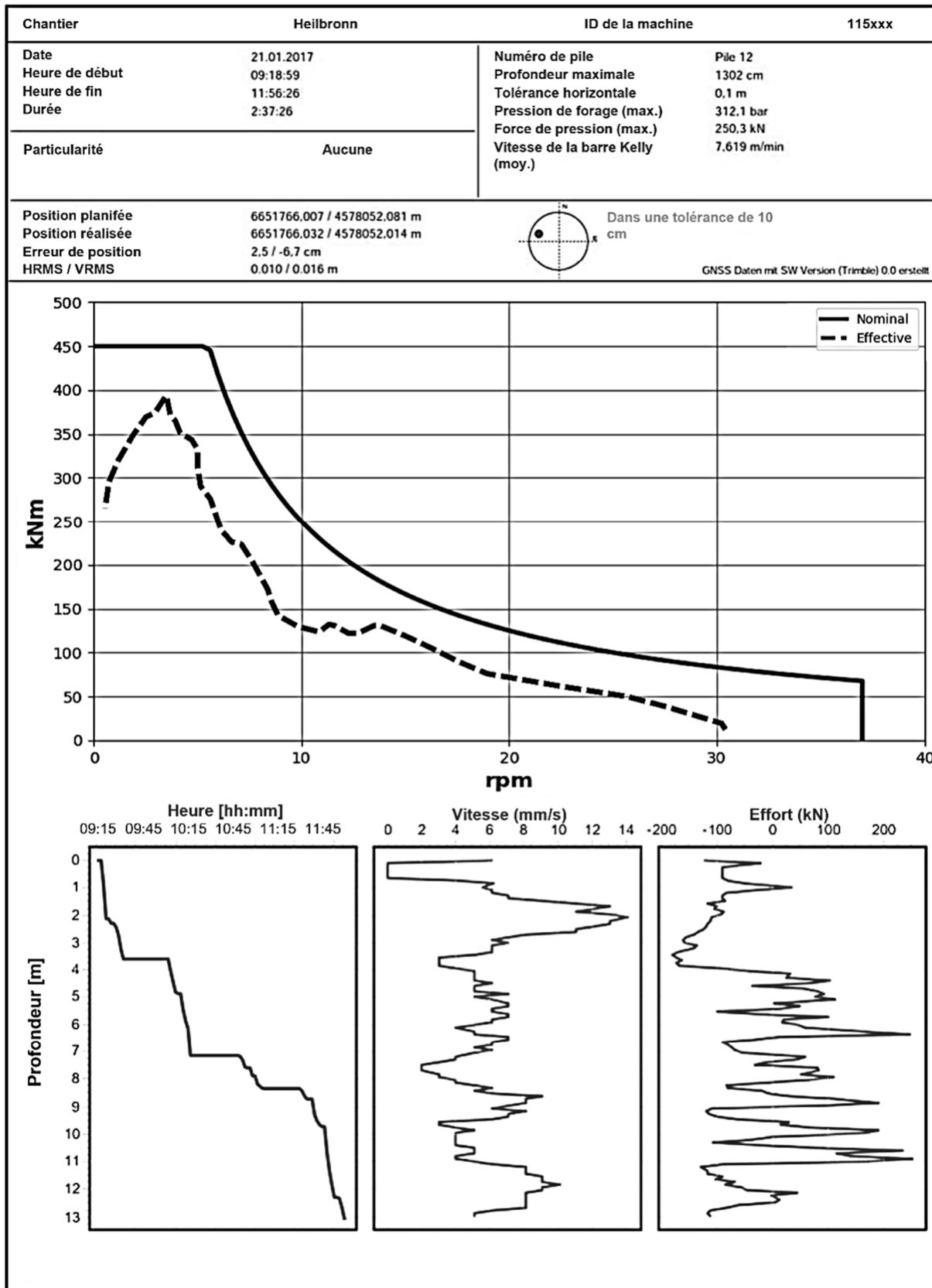
Pour ce sujet, on admet que les imports suivants ont été réalisés en amont :

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt
```

Le tableau suivant récapitule quelques éléments de syntaxe utiles :

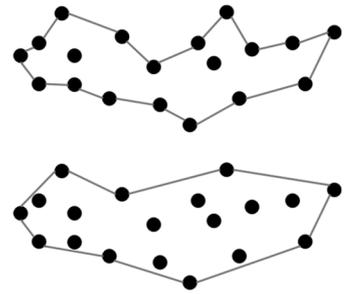
	Syntaxe Python
Définir un tableau à une dimension	$L=[1, 2, 3]$ (liste) $v=\text{array}([1, 2, 3])$ (vecteur)
Accéder à un élément	$v[0]$ renvoie 1 ( $L[0]$ également)
Créer une nouvelle figure	<code>plt.figure()</code>
Tracer une courbe	<code>plt.plot(X,Y)</code> où $X$ et $Y$ , de même taille, sont respectivement la liste des abscisses et des ordonnées de la courbe.

# ANNEXE 3 - Exemple d'un rapport de chantier



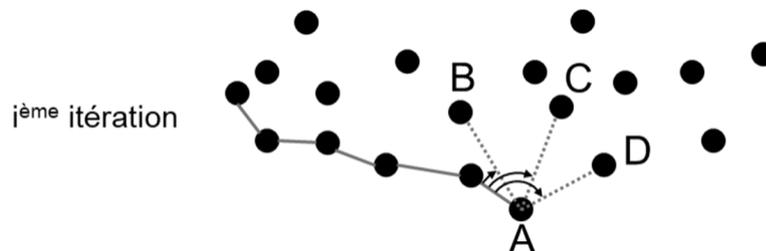
## ANNEXE 4 - Algorithme ConcaveHull

L'algorithme *ConcaveHull* permet de trouver au sein d'un nuage de points les points qui, dans l'ordre, forment ensemble le polygone représentant l'enveloppe concave de ce nuage. Comme l'illustre la figure ci-contre, un même nuage de points possède plusieurs enveloppes concaves en fonction de la "rugosité" désirée.



L'algorithme établi par Moreira et Yasmina-Santos en 2007 propose une approche itérative qui, à partir d'un point de départ dont il est certain qu'il appartient à l'enveloppe (par exemple le point possédant l'abscisse minimale), cherche le prochain sommet du polygone enveloppe parmi ses  $k$ -plus proches voisins dans le nuage de points considéré et ce jusqu'à retrouver le point de départ qui refermera l'enveloppe.

Pour choisir le bon voisin parmi les  $k$ -plus proches, l'algorithme les trie d'abord par ordre décroissant de l'angle que chacun forme avec l'arête précédente du polygone enveloppe (voir ci-dessous), puis choisit le premier point de la liste. Si ce point, en l'ajoutant comme sommet du polygone, forme une arête qui coupe les arêtes déjà formées du polygone, il est rejeté et le suivant dans la liste est choisi à sa place.



La fonction **ProchesVoisins(Points,A,k)** utilisée dans cet algorithme, permet, à partir des coordonnées  $(x,y)$  d'un point A, de renvoyer la liste des coordonnées  $(x,y)$  de ses  $k$ -plus proches voisins présents dans la liste de points Points. Cette fonction et ses sous-fonctions sont écrites ci-dessous.

```
def ProchesVoisins(Points,A,k):
    # Calcule les distances de A aux Points
    Dist=Distances(Points,A)
    # Trouve les k-plus courtes distances
    DistList=list(Dist)
    Tri(DistList,0,len(DistList)-1,k)
    kDist=DistList[:k]
    # Trouve les points correspondants
    Voisins=k*[0]
    for i in range(len(Dist)):
        test=Dist[i]
        for j in range(k):
            if test==kDist[j]:
                Voisins[j]=Points[i]
    return Voisins
```

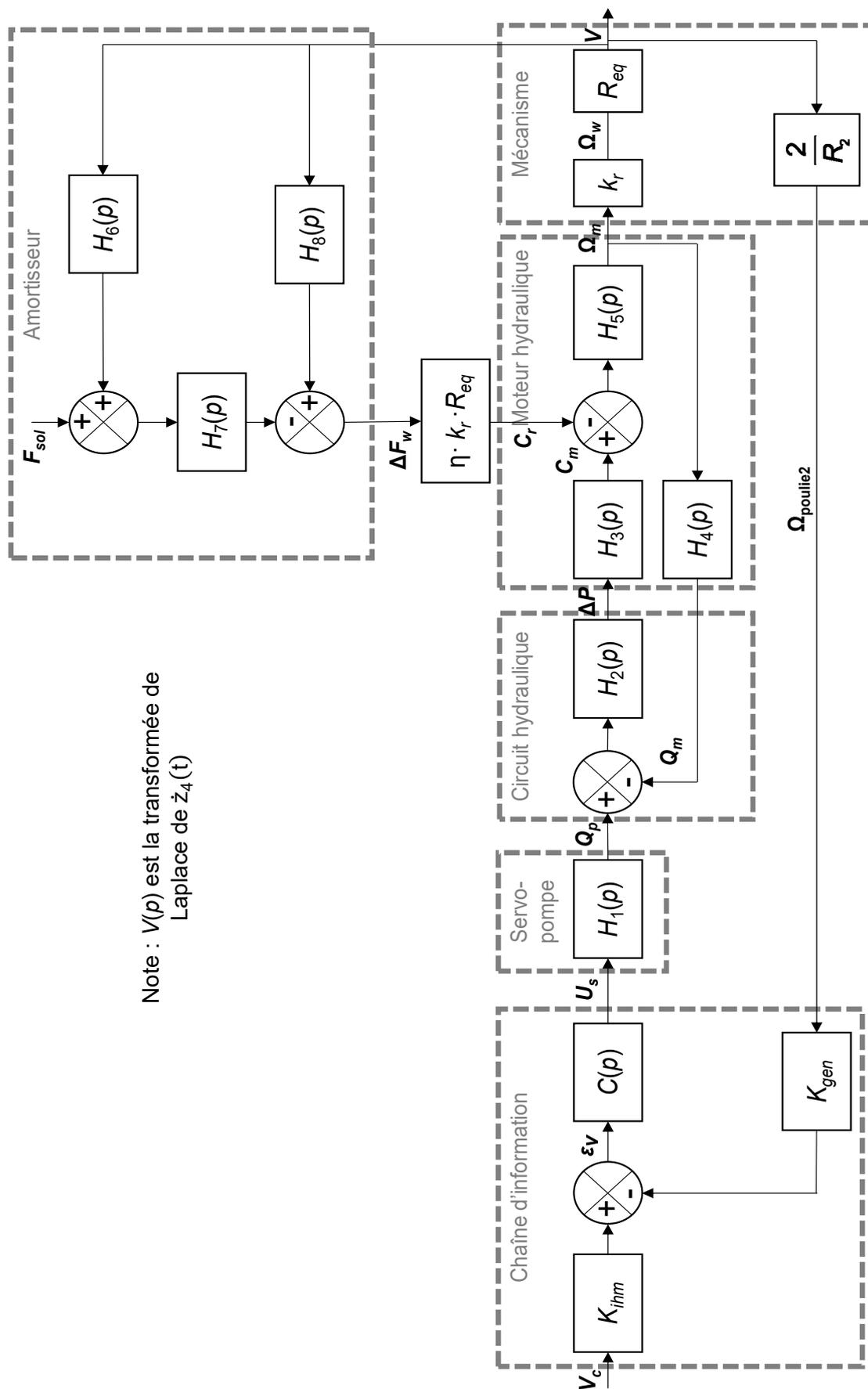
```
def Tri(L,gauche,droite,k):
    if gauche<droite:
        rang=Segmentation(L,gauche,droite)
        Tri(L,gauche,rang-1,k)
        if rang<gauche+k:
            Tri(L,rang+1,droite,k)
```

```
def Segmentation(L,gauche,droite):
    # Choisit un pivot
    p = L[gauche]
    # Segmente L
    rang = gauche
    for i in range(gauche,droite+1):
```

**Partie à compléter  
sur feuille de copie**

```
# Place le pivot entre les 2 segments
L[gauche],L[rang] = L[rang],L[gauche]
return rang
```

# ANNEXE 5 - Schéma-bloc : modélisation de l'asservissement



Note :  $V(p)$  est la transformée de Laplace de  $\dot{z}_4(t)$

FIN



CONCOURS  
COMMUN

Numéro  
d'inscription

Numéro  
de table

Né(e) le

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Emplacement  
GR Code

Filière : **MP**

Session : **2023**

Épreuve de : **SCIENCES INDUSTRIELLES**

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

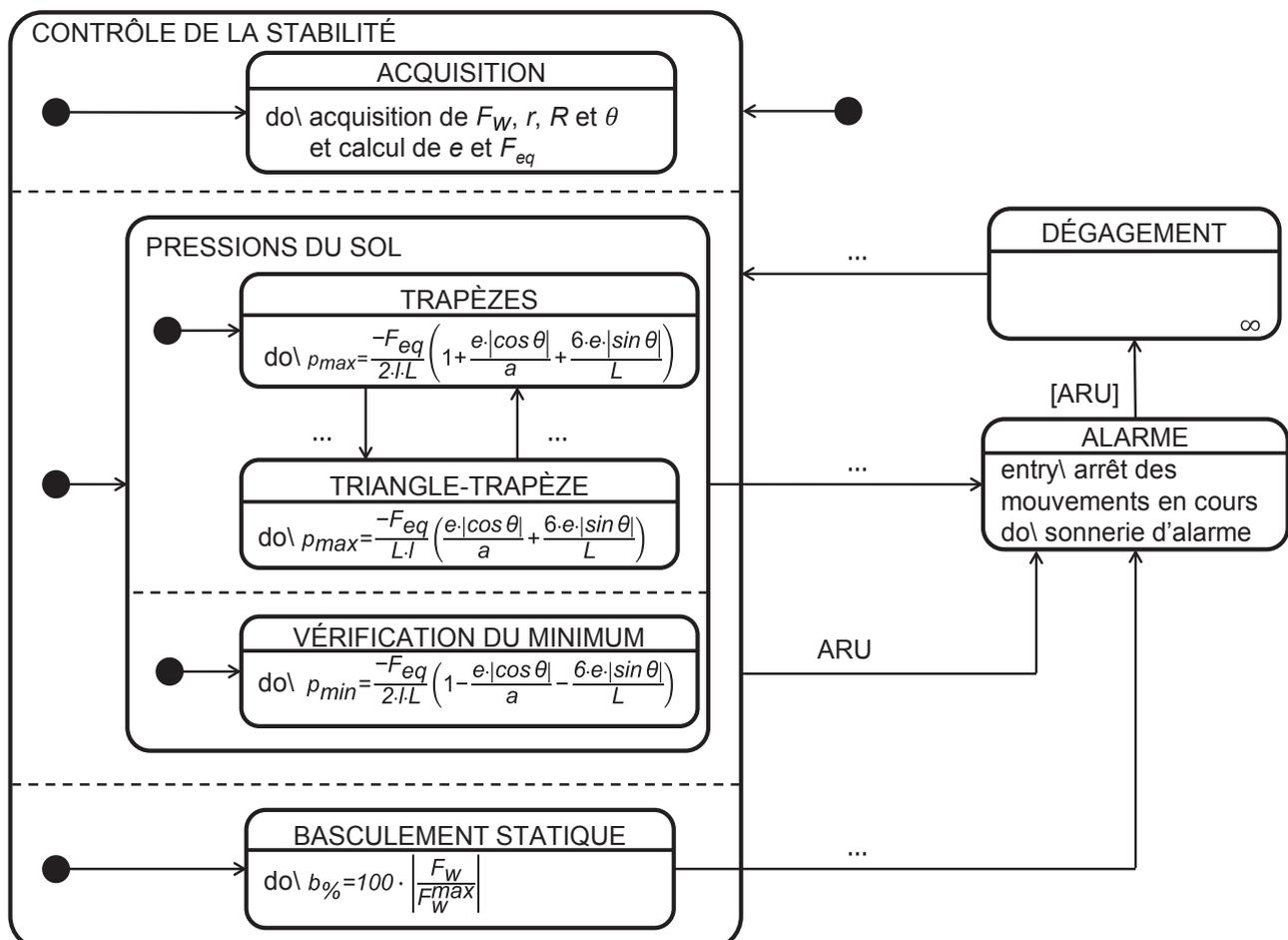
MP7SI

## DOCUMENT RÉPONSE

Ce Document Réponse doit être rendu dans son intégralité avec la copie.

### DR1 - Diagramme d'états

Q10



B

1/4

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

DR2 - Évolutions théoriques des pressions estimées par l'ordinateur et du pourcentage d'atteinte de la posture critique de basculement

Q11

